كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الثالثة

المادة : ميكانيك2

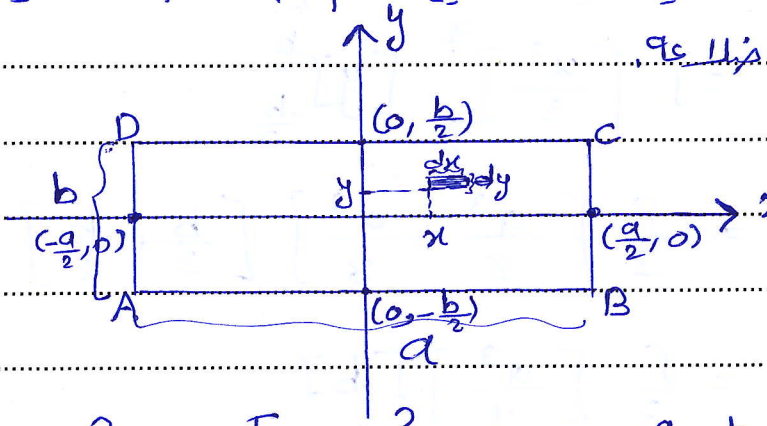
المحاضرة : الثانية/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

السؤال الأول: أوجد عزم عطالة سطح مستطيل طوله a وعرضه b بالنسبة لمحورية التناظر بالنسبة لضلعين متقابلين فيه منه أحد أضلاعه.



$I_{ox} = ?$, $I_{oy} = ?$ بالنسبة لمحورية التناظر

$$I_{ox} = \int_S r^2 \, dm = \rho \int y^2 \, ds = \rho \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 \, dx \, dy$$

$$= \rho \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 \, dy$$

$$= \rho \left[x \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}$$

$$= \rho \left[\frac{a}{2} + \frac{a}{2} \right] \cdot \left[\frac{b^3}{24} + \frac{b^3}{24} \right]$$

$$= \rho \cdot a \cdot \frac{1}{12} b^3 = \frac{1}{12} \rho a b b^2$$

$$\Rightarrow I_{ox} = \frac{1}{12} M b^2$$

$$I_{oy} = \int_S r^2\,dm = \rho \int x^2\,ds$$

توضيح: $ds = dx\,dy$

$$= \rho \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2\,dx\,dy$$

$\frac{-a}{2} \le x \le \frac{a}{2}$

$\frac{-b}{2} \le y \le \frac{b}{2}$

$$= \rho \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2\,dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy$$

$S = a.b$

$\rho = \frac{M}{S}$

$M = \rho . S = \rho a b$

$$= \rho \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[y\right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}$$

$$= \frac{\rho}{3}\left[\frac{a^3}{8} + \frac{a^3}{8}\right]\left[\frac{b}{2} + \frac{b}{2}\right]$$

$$= \frac{\rho}{3}\left[\frac{a^3}{4}\right][b]$$

$$= \frac{1}{12}\rho a b a^2 = \frac{1}{12} M a^2$$

بالنسبة لأطوال متعامدة: (هوشتاينر) $I_{AB} = I_{ox} + Mr^2$

$$= \frac{1}{12} M b^2 + M\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{12} M b^2 + M \frac{b^2}{4} = \frac{1}{3} M b^2$$

$$I_{AD} = I_{oy} + Mr^2$$

$$= \frac{1}{12} M a^2 + M\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{12} M a^2 + M \frac{a^2}{4} = \frac{1}{3} M a^2$$

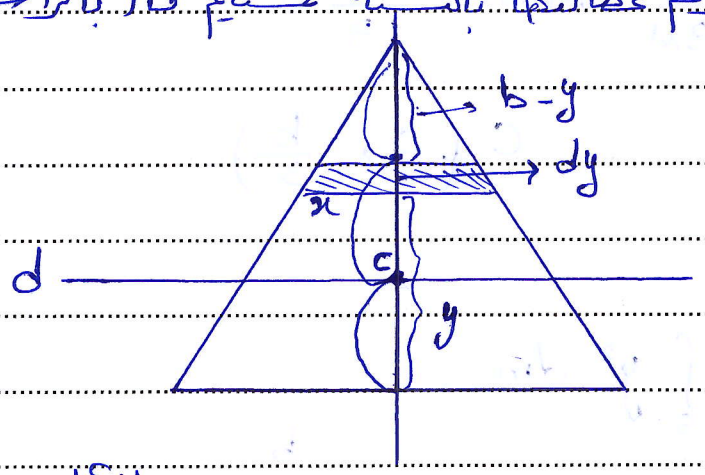
السؤال الثاني: مسبوقة على شكل مثلث متساوي الساقين متجانسة طول القاعدة a وارتفاعها b

1- عين مركز الكتلة.

2- احسب عزم العطالة بالنسبة لمحور منطبق على القاعدة

3- احسب عزم عطالتها بالنسبة لمحور مار بالرأس وموازي القاعدة

الحل:



① بما أن yy' محور تناظر فالمركز الكتلي لـ الكل يقع عليه $\Leftarrow x_c = 0$

$$y_c = \frac{\int_\xi y\,dm}{M} = \frac{\rho \int_\xi y\,ds}{M}$$

توضيح: $ds = x\,dy$

$0 \le y \le b$

$$\frac{b-y}{b} = \frac{x}{a}$$

$$x = \frac{a}{b}(b-y)$$

$$\Rightarrow ds = \frac{a}{b}(b-y)\,dy$$

$$y_c = \frac{\rho \int_0^b y \frac{a}{b}(b-y)\,dy}{M}$$

$$= \frac{\rho a}{Mb} \int_0^b (by - y^2)\,dy$$

$$= \frac{\rho a}{Mb}\left[b\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^b$$

$$= \frac{\rho a}{Mb}\left[\frac{b^3}{2} - \frac{b^3}{3}\right]$$

$$y_c = \frac{\rho a}{M b} \cdot \frac{b^3}{6}$$

$$= \frac{1}{3M} \rho \left(\frac{1}{2} a b\right) b$$

$$= \frac{1}{3M} M b = \frac{1}{3} b$$

$$C\left(0, \frac{b}{3}\right)$$

(2)

$$I_{ox} = \int_s y^2 \, dm$$

$$= \rho \int_s y^2 \, ds = \rho \int_0^b y^2 \left(\frac{a}{b}(b-y)\right) dy$$

$$= \rho \frac{a}{b} \int_0^b \left(b y^2 - y^3\right) dy$$

$$= \rho \frac{a}{b} \left[b \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^b$$

$$= \rho \frac{a}{b} \left[\frac{1}{12} b^4\right]$$

$$= \frac{1}{12} \rho a b^3 = \frac{1}{6} \rho \left(\frac{1}{2} a b\right) b^2$$

$$= \frac{1}{6} M b^2$$

③ لدينا حسب هويغنز:

$$I_{ox} = I_g + M\left(\frac{b}{3}\right)^2$$

$$\frac{1}{6}Mb^2 = I_g + \frac{1}{9}Mb^2$$

$$\frac{1}{18}Mb^2 = I_g$$

أيضاً حسب هويغنز:

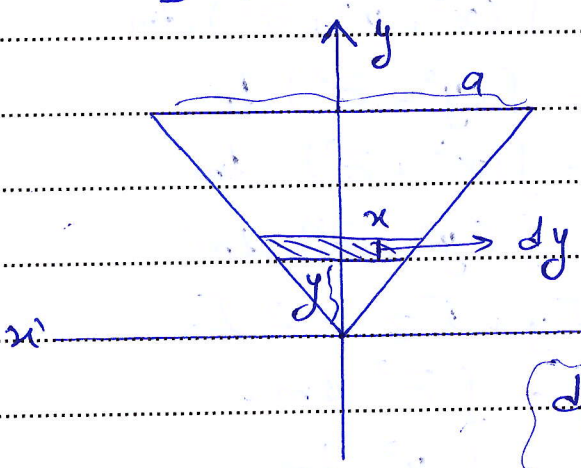
$$I_\Delta = I_g + M\left(\frac{2}{3}b\right)^2$$

$$= \frac{1}{18}Mb^2 + M \times \frac{4}{9}b^2$$

$$= \frac{1}{2}Mb^2$$

I_g: عزم عطالة الصفيحة بالنسبة للمحور الذي يمر من C والموازي لـ Δ أو ox

بطريقة ثانية:



$$I_{ox} = \int_S y^2\,dm = \rho\int y^2\,ds$$

$$= \rho\int_0^b y^2 \frac{a}{b} y\,dy$$

$ds = x \cdot dy$

$0 \le y \le b$

$\frac{y}{b} = \frac{x}{a} \Rightarrow x = \frac{a}{b}y$

$ds = \frac{a}{b} y\,dy$

$$I_{ox} = \rho \frac{a}{b}\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^b$$

$$= \rho \frac{a}{b}\left[\frac{b^4}{4}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\rho a b^3$$

$$= \frac{1}{2}\left(\rho \frac{1}{2} ab\right) b^2$$

$$= \frac{1}{2} M b^2$$

السؤال الثالث: أوجد عزم عطالة سطح كرة نصف قطرها R بالنسبة لمركزها ثم لقطرها ثم بالنسبة لمستوى القطري.

تذكرة:

$$I_o = \int (x^2 + y^2 + z^2)\, dm$$

$$I_x = \int (y^2 + z^2)\, dm$$

$$I_y = \int (x^2 + z^2)\, dm$$

$$I_z = \int (y^2 + z^2)\, dm$$

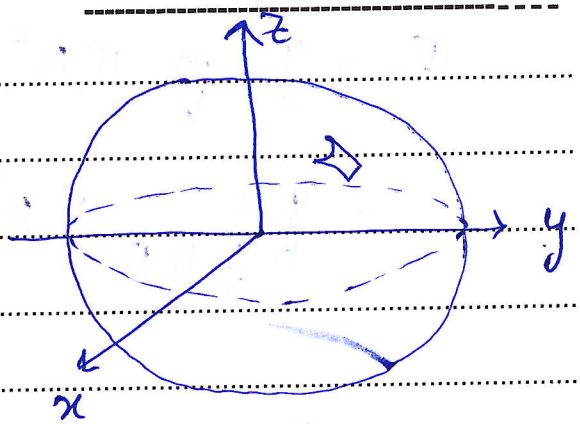
$$I_x + I_y + I_z = 2 I_o$$

$$I_{xoy} = \int z^2\, dm$$

$$I_{xoz} = \int y^2\, dm$$

$$I_{yoz} = \int x^2\, dm$$

$$I_{xoy} + I_{xoz} + I_{yoz} = I_o$$



$$I_o = \int r^2 \, dm$$

$$= \int_S R^2 \, dm$$

$$= R^2 \int_S dm = R^2 M$$

$$I_x = I_y = I_z$$

$$I_x + I_y + I_z = 3 I_x = 2 I_o \Rightarrow I_x = \frac{2}{3} I_o = \frac{2}{3} R^2 M$$

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz}$$

$$I_{xy} + I_{xz} + I_{yz} = I_o$$

$$3 I_{xy} = I_o \Rightarrow I_{xy} = \frac{1}{3} I_o = \frac{1}{3} R^2 M$$

السؤال الرابع:

أوجد عزم عطالة كرة متجانسة صماء نصف قطرها R بالنسبة لمركزها ثم لقطرها ثم لمستوى قطري.

الحل: نأخذ الجسم النصري على شكل قشرة كروية بتخانة dr

$$dr = 4\pi r^2 \, dr$$

$$0 < r \leq R$$

$$I_o = \int_V r^2 \, dm = \rho \int_V r^2 \, dV$$

$$= \rho \int_0^R r^2 \, 4\pi r^2 \, dr$$

$$= \rho \, 4\pi \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^R = \frac{4\rho \pi R^5}{5}$$

$$I_o = \frac{4}{5}\frac{M}{V}\pi R^5$$

$$= \frac{4M}{5\,\frac{1}{3}\pi R^3}\pi R^5 = \frac{3}{5}MR^2$$

بالنسبة للقطر:

$$3I_{ox} = 2I_o \Rightarrow I_{ox} = \frac{2}{3}I_o = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{5}MR^2\right) = \frac{2}{5}MR^2$$

$$3I_{oxy} = I_o \Rightarrow I_{oxy} = \frac{1}{3}I_o = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{5}MR^2\right) = \frac{1}{5}MR^2$$

انتهت المحاضرة.

TEL:0931497960 - مكتبة A to Z

مكتبة A to Z