كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الثالثة

المادة : ميكانيك2

المحاضرة : الاولى/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

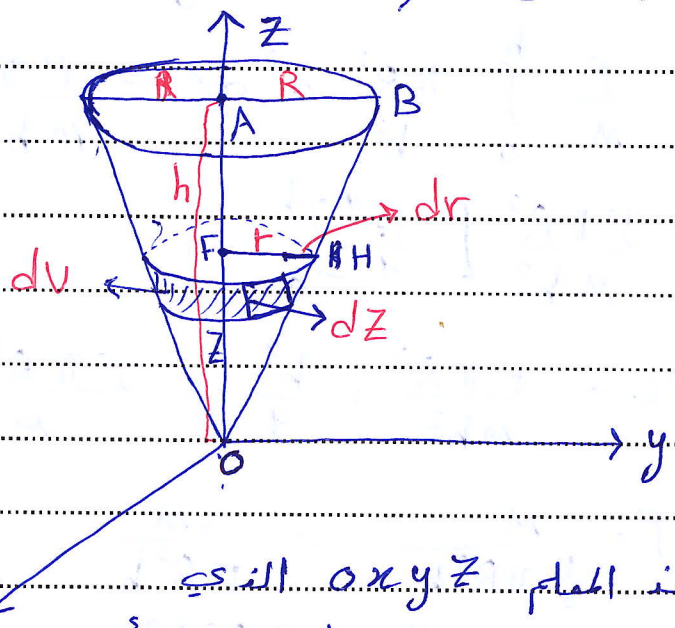
كلية العلوم

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

السؤال الأول:

أوجد مركز كتلة جسم أصم بشكل مخروط دوراني قائم متجانس قاعدته دائرة نصف قطرها R وارتفاعه h وكتلته M



لنأخذ المعلم oxyz الذي محوره oz و o ينطبق على رأس المخروط فيكون $C \in (oz)$ ومنه $x_c = y_c = 0$ يبقى إيجاد z_c

$$z_c = \frac{\int z\, dm}{M} = \frac{\rho_v \int z\, dv}{M}$$

لنأخذ الجسم الصغري dv والموضح في الشكل المجاور وهو على شكل أسطوانة ارتفاعها dz ونصف قطر قاعدتها r

$$dv = \pi r^2 dz \quad ; \quad 0 \le dz \le h$$

لكن بتشابه المثلثين $\triangle OAB$ و $\triangle OFH$

$$\frac{r}{R} = \frac{z}{h} \Leftarrow r = \frac{R}{h} z$$

$$\Rightarrow dV = \pi \frac{R^2}{h^2} z^2 \, dz$$

$$z_c = \frac{\rho}{M} \int_V z \, dV = \frac{\rho}{M} \int_0^h z \cdot \pi \frac{R^2}{h^2} z^2 \, dz$$

$$= \frac{\rho}{M} \int_0^h \frac{\pi R^2}{h^2} z^3 \, dz = \frac{\rho \pi R^2}{M h^2} \int_V z^3 \, dz$$

$$= \frac{\rho \pi R^2}{M h^2} \left[\frac{z^4}{4} \right]_0^h$$

$$\Rightarrow z_c = \frac{\rho \pi R^2}{M h^2} \cdot \frac{h^4}{4} = \frac{\rho \pi R^2 h^2}{M}$$

لكن $M = \rho V \Leftarrow$

$$\rho = \frac{M}{\frac{1}{3} \pi R^2 h} = \frac{3M}{\pi R^2 h}$$

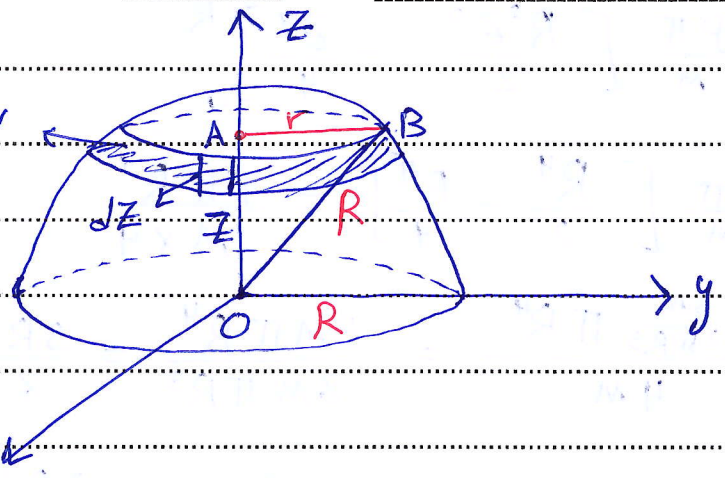
$$\Rightarrow z_c = \frac{\frac{3M}{\pi R^2 h} \cdot \pi R^2 h^2}{4M} = \frac{3}{4} h$$

$$\Rightarrow C\left(0, 0, \frac{3}{4} h\right)$$

السؤال الثاني:

أوجد مركز كتلة نصف كرة متجانسة صماء

TEL:0931497960 — مكتبة A to Z



لنأخذ الكرة الأصلية حيث oxyz محور تناظر الكرة (oZ) ومركز قاعدتها ينطبق على O $\Leftarrow$ $C \in (oZ) \Leftarrow$

$$x_c = y_c = 0$$

لنوجد Z_c

$$Z_c = \frac{\int Z \cdot dm}{M}$$

حيث dm كتلة الجسم المنصري الموضع في الشكل المحدود والمأخوذ على شكل اسطوانة ارتفاعها dZ (ارتفاعها) ونصف قطر قاعدتها r.

$$dm = \rho dV = \rho \pi r^2 dZ \quad ; \quad 0 < Z < R$$

$\Leftarrow$ حجم الجسم المنصري

$$\Rightarrow Z_c = \frac{\int_0^R Z \cdot \rho \pi r^2 dZ}{M} = \frac{\rho\pi \int_0^R Z r^2 dZ}{M}$$

لإيجاد الثابت: oAB

$$r^2 + Z^2 = R^2$$

$$r^2 = R^2 - Z^2$$

$$Z_c = \frac{\rho\pi \int_0^R Z(R^2 - Z^2) dZ}{M} = \frac{\rho\pi}{M} \int_0^R (R^2 Z - Z^3) dZ$$

$$= \frac{\rho\pi}{M}\left[\frac{R^2Z^2}{2} - \frac{Z^4}{4}\right]_0^R$$

$$= \frac{\rho\pi}{M}\left[\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right] = \frac{\rho\pi R^4}{M\times 4}$$

$$= \frac{\frac{3M}{2\pi R^3}\pi R^4}{4M} = \frac{3M\pi R^4}{8M\pi R^3} = \frac{3R}{8}$$

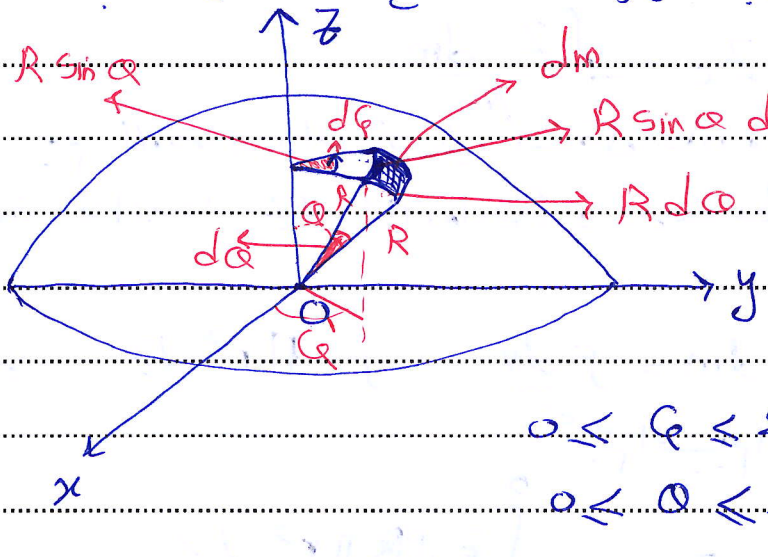
$$\rho = \frac{M}{V}$$

$$\rho = \frac{M}{\frac{2}{3}\pi R^3} = \frac{3M}{2\pi R^3}$$

$$\Rightarrow C\left(0,0,\frac{3R}{8}\right)$$

السؤال الثالث:

أوجد مركز كتلة ثخن نصف كرة متجانسة



$$0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

لنأخذ الجملة oxyz بحيث oz تنطبق على محور تناظر الكرة و o على مركز قاعدة الدائرة العظمى (القاعدة)

$$\Leftarrow x_c = y_c = 0 \Leftarrow C \in (oz)$$

عندئذٍ

$$z_c = \frac{\int z\,dm}{M}$$

حيث: dm الجسم العنصري الموضع كما بالشكل:

$$dm = \rho\, ds = \rho \left[R \sin\alpha \, d\varphi \; R \, d\alpha \right]$$

$$\Rightarrow Z_c = \frac{\rho R^2}{M} \int_S z \sin\alpha \, d\varphi \, d\alpha$$

$z = R\cos\alpha$ حيث

$$Z_c = \frac{\rho R^2}{M} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R \cos\alpha \sin\alpha \, d\varphi \, d\alpha$$

$$= \frac{\rho R^2}{M} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin 2\alpha \, d\alpha$$

$$= \frac{\rho R^3}{M} \left[\varphi\right]_0^{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{2} \cos 2\alpha \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\rho R^3}{M} \left[2\pi\right] \cdot \left[\frac{-1}{4} \left[\cos\pi - \cos 0 \right] \right]$$

$$= \frac{\rho R^3}{M} (2\pi) \left(\frac{-1}{4} (-1 - 1) \right]$$

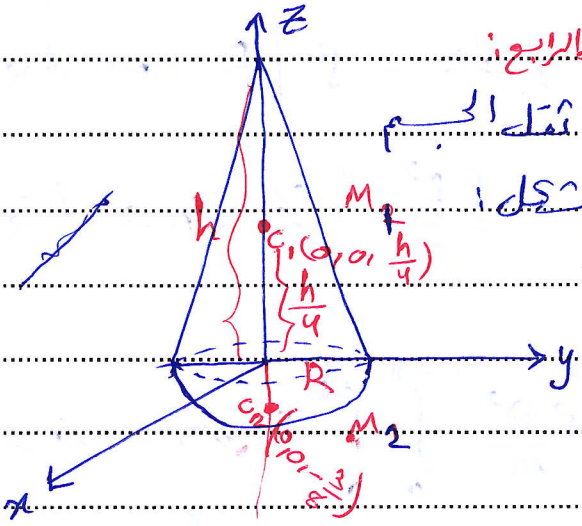
$$= \frac{\rho R^3}{M} \cdot 2\pi \left(\frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{\frac{M}{S} R^3 \pi}{M} = \frac{R^3 \pi}{S} = \frac{R^3 \pi}{2\pi R^2} = \frac{R}{2}$$

$$\Rightarrow C\left(0, 0, \frac{R}{2}\right)$$

السؤال الرابع:

أوجد مركز ثقل الجسم الموضح بالشكل:



لنأخذ العلم oxyz بحيث oz هو محور التناظر و oxy ستوي قاعدة المخروط.

$$x_c = y_c = 0$$

$$z_c = \frac{M_1 z_{C_1} + M_2 z_{C_2}}{M_1 + M_2}$$

$$z_c = \frac{M_1 \frac{h}{4} + M_2\left(-\frac{3}{8}R\right)}{M_1 + M_2}$$

C_1 : مركز ثقل المخروط , C_2 : مركز ثقل الكرة

M_1 : كتلة المخروط , M_2 : كتلة الكرة

انتهت المسألة

TEL:0931497960 - مكتبة A to Z

مكتبة A to Z