كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الثالثة

المادة : ميكانيك2

المحاضرة : الثالثة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

عزم العطالة:

* عزم العطالة لنقطة مادية:

يعرف عزم عطالة نقطة مادية (p,m) بالنسبة لنقطة O تبعد عن p مسافة r بالعلاقة: $I_o = mr^2$ عزم عطالة النقطة (p,m) بالنسبة لمحور Δ هو عبارة عن جداء الكتلة p بمربع بعدها عن Δ

- عزم عطالة النقطة (p,m) بالنسبة لمستوي Π هو عبارة عن جداء كتلة p في مربع البعد عن المستوي.

* عزم عطالة جملة مادية:

يعرف لدينا جملة مادية $(p_1,m_1),(p_2,m_2),\dots,(p_n,m_n)$ إن عزم عطالة الجملة بالنسبة لنقطة أو لمحور أو لمستوي هو مجموع عزوم النقط:

$$I = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \dots + m_nr_n^2 = \sum_{i=1}^{n} m_ir_i^2$$

* عزم عطالة الأجسام المادية:

يعرف لدينا جسم مادي في الفضاء D يمكن عزم عطالة الجسم بالنسبة لنقطة أو لمستوي أو لمحور بالعلاقة:

$$I = \int_D r^2\,dm$$

بما أن: $dm = \rho\,ds$ (سلك)

لسطح $dm = \rho\, d\sigma$

لحجم $dm = \rho\, dV$

⇐ يصبح عزم العطالة لجسم :

$$I = \int_L r^2 \rho\, ds$$

$$I = \iint_S r^2 \rho\, d\sigma$$

$$I = \iiint_V r^2 \rho\, dV$$

* كيف نحسب العطالة :

رمزه K ويعطى بالعلاقة : $I = MK^2$ أي : $K = \sqrt{\frac{I}{M}}$

* عزم عطالة جسم بالنسبة للمستويات والمحاور الإحداثية :

- عزم العطالة بالنسبة للمبدأ :

$$I_o = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$$

- عزم العطالة بالنسبة لمحور ox :

$$I_x = \sum_{i=1}^{n} m_i (y_i^2 + z_i^2)$$

- بالنسبة لمحور oy :

$$I_y = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + z_i^2)$$

- بالنسبة للمحور oz :

$$I_z = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

- عزم العطالة بالنسبة لمستوي من المستويات الاحداثية:

بالنسبة لـ xoy:

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i^2$$

بالنسبة لـ xoz:

$$I_{xz} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2$$

بالنسبة لـ yoz:

$$I_{yz} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2$$

- تشكل المجموعة المادية جسم متصل يجعل المجموع في القوانين السابقة يتحول إلى تكامل:

$$I_o = \int (x^2 + y^2 + z^2)\, dm$$

$$I_x = \int (y^2 + z^2)\, dm$$

$$I_{xy} = \int z^2\, dm$$

بالطريقة:

$$I_o = \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z)$$

$$I_o = I_{xy} + I_{xz} + I_{yz}$$

سؤال: برهن أن عزم العطالة بالنسبة لأي محور من المحاور الاحداثية أصغر من مجموع عزوم العطالة بالنسبة للمحورين الباقيين وأكبر من فرقهما.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحل: لنأخذ I_x ولنبرهن $I_x \leq I_y + I_z$

$$I_x = \int (y^2 + z^2)\, dm$$

$$I_y + I_z = \int (x^2 + z^2)\, dm + \int (x^2 + y^2)\, dm$$

$$= \int (2x^2 + y^2 + z^2)\, dm \geq \int (y^2 + z^2)\, dm = I_x$$

- لنبرهن $I_x \geq I_y - I_z$

$$I_y - I_z = \int (x^2 + z^2)\, dm - \int (x^2 + y^2)\, dm$$

$$= \int (z^2 - y^2)\, dm \leq \int (z^2 + y^2)\, dm = I_x$$

ملاحظة: $I_o = I_{xy} + I_z$

أي أن عزم عطالة مجموعة بالنسبة لنقطة يساوي عزم العطالة بالنسبة لمحور ومستوي يحتويان في هذه النقطة.

* نظرية هويغنز الأولى:

① إن عزم عطالة جسم مادي بالنسبة لنقطة هو عزم عطالة الجسم بالنسبة لمركز الكتلة وضافاً إليه جداء كتلة الجسم بمربع البعد عن النقطة

$$I_o = I_c + MR^2 \quad ; \quad R = OC$$

② عزم العطالة بالنسبة لمحور Δ هو عزم العطالة بالنسبة لمحور Δ' يوازي (Δ) ومار من مركز الكتل مضافاً إليه جداء الكتلة في مربع البعد بين Δ و Δ'

$$I_\Delta = I_{\Delta'} + MR^2 \quad ; \quad R \text{ البعد بين } \Delta \text{ و } \Delta'$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

③ عزم العطالة بالنسبة لمستوي Π هو عزم العطالة بالنسبة لمستوي Π' يوازي Π ماران مركز الكتل ويضاف إليه جداء الكتلة في مربع البعد بين المستويات.

تمرين:

أوجد مركز عطالة سلك متجانس بشكل قطعة مستقيمة طولها l كتلتها M بالنسبة لـ:

1- مركز ثقله.

2- بالنسبة لأحد الأطراف.

3- لمستقيم منطبق عليه ومستوي منطبق عليه.

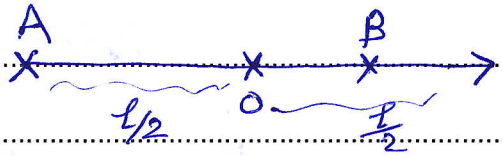
4- لمستقيم عمودي عليه في منتصفه.

5- لمستقيم عمودي عليه في أحد طرفيه ومستوي عمودي عليه في أحد طرفيه.

6- لمستقيم ماريٍ إحدى نهايتيه ويصنع زاوية α لمستوي ماريٍ إحدى نهايتيه ويصنع زاوية α

7- لمستقيم يوازي السلك يبعد عنه بعد a ثم بالنسبة لمستقيم مارٍ من مركز الكتل يصنع معه زاوية α.

الحل:



$$I_o = \int r^2 \rho \, ds \qquad (1)$$

$$= \rho \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 \, dx = \frac{\rho}{3} \left[x^3\right]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{\rho}{3}\left[\frac{l^3}{8} + \frac{l^3}{8}\right] = \frac{\rho l^3}{12}$$

$$= \frac{M l^2}{12}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$I_o = I_o + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{M\ell^2}{12} + \frac{M\ell^2}{4} = \frac{M\ell^2}{3}$$ (2)

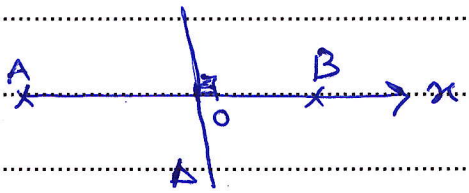
(3) Δ ينطبق على المحور z:

$$I_\Delta = \int r^2 \rho \, ds = 0 \quad ; \quad r = 0$$

ينطبق على المستوى xoy:

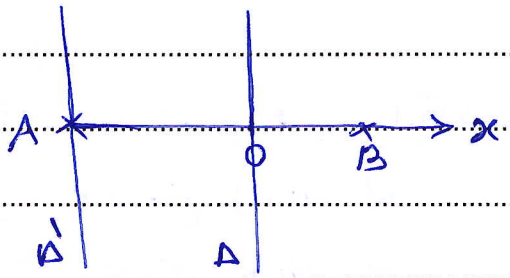
$$I = I_{xy} = \int z^2 dm = 0$$

(4)



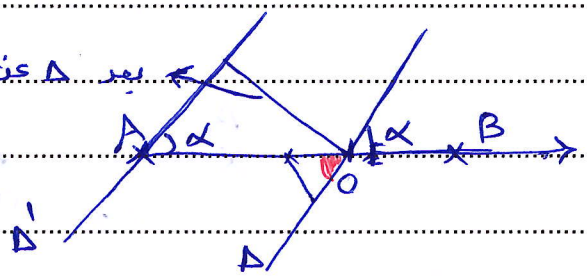
$$I_\Delta = \int \rho x^2 dx = \frac{M\ell^2}{12}$$

(5)



$$I_{\Delta'} = I_\Delta + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{M\ell^2}{12} + \frac{M\ell^2}{4} = \frac{M\ell^2}{3}$$

(6) Δ' يصنع مع Δ زاوية α



$$I_{\Delta'} = I_\Delta + Mr^2 = \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \rho x^2 \sin^2\alpha \, dx + M\left(\frac{\ell}{2}\sin\alpha\right)^2$$

$$= \frac{M\ell^2 \sin\alpha}{12} + \frac{M\ell^2 \sin^2\alpha}{4} = M\ell^2 \frac{\sin^2\alpha}{3}$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z