كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : نظرية البيان

المحاضرة : الثالثة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبةA to Z

س: هل كل مسلك $W: u-v$ في بيان $G(V,E)$ ينتج عنه مسار $W: u-v$؟

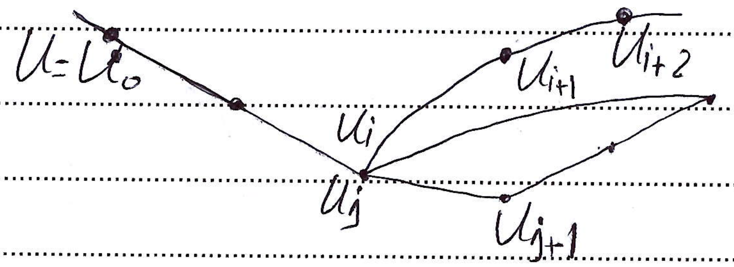
الجواب:

$W: u=u_0, u_1, u_2, \dots, u_n=v$

حيث $u_0, u_1, \dots, u_n$ رؤوس

نفرض أن u_i هو أول رأس مكرر في المسلك W

هذا يعني وجود رأس u_j حيث $i<j$ بحيث $u_j=u_i$



نقتطع من المسلك المغلق W $u_j, u_{j+1}, \dots, u_i=u_j$

حيث أنه u_{i+1} هو مار u_j نكرر العملية السابقة على رأس مكرر في W فنحصل بالنهاية على مسلك لا يحوي رؤوساً مكررة أي مسار يصل u بـ v

$W': u-v$

طول مسار بين رأسين: هو عدد الأضلاع المكونة له

المسافة: نقول عن الرأسين u و V في البيان G أنهما متصلان إذا كان هنالك مسار يصل بينهما و G بيان مترابط إذا كان أي رأسين كيفيين فيه متصلان بمسار واحد على الأقل المسافة distance وتعرف بأنها أقصر مسار بين الرأسين u , V

* إذا كان u , v غير متصلين بمسار فنصطلح أن المسافة بينهما $= \infty$

نرمز للمسافة بين u و v بالرمز $d(u,v)$

في أي بيان $G(V,E)$ إن ~~الدالة~~ الرؤوس الكيفية $u,v,w \in V$ تحقق ما يلي:

① $d(u,v) \geq 0$

② $d(u,v) = 0 \Leftrightarrow u = v$

③ $d(u,v) = d(v,u)$

④ $d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w)$

بالتالي تابع المسافة $d(u,v)$ مع مجموعة رؤوس البيان V فضاءاً مترياً.

الاختلاف المركزي للرأس $v \in V$: هو أكبر مسافة لـ v عن أي رأس آخر في هذا البيان

$e(v) = max\{d(u,v) : a \in V\}$

نصف قطر البيان G: هو أصغر اختلاف مركزي

$rad(G) = min\{e(v) : v \in V\}$

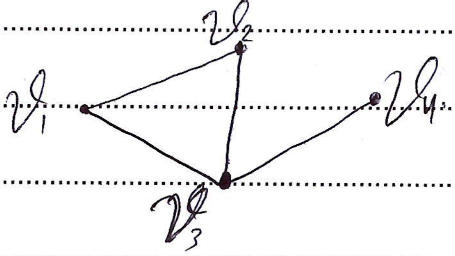
القطر للبيان G: هو أكبر اختلاف مركزي

$diam(G) = max\{e(v) : v \in V\}$

مركز البيان: هو مجموعة رؤوس البيان التي تباعدها المركزي يساوي نصف القطر:

$$Z(G) = \{ v \in V ,\ e(v) = rad(G) \}$$

مثال:



$d(v_i, v_j)$	v_1	v_2	v_3	v_4	$e(v)$
v_1	0	1	1	2	2
v_2	1	0	1	2	2
v_3	1	1	0	1	1
v_4	2	2	2	0	2

$rad(G) = 1$ ، $diam(G) = 2$ ، $Z_G = \{ v_3 \}$

مبرهنة: لأجل أي بيان مترابط G يكون لدينا:

$$rad(G) \le diam(G) \le 2\,rad(G)$$

~~الإثبات~~

~~الشق الأول من المتراجحة:~~

~~واضح من التعريف تعريف القطر ونصف القطر~~

الإثبات:

الشق الأول من المتراجحة واضح من تعريف نصف القطر والقطر.

الشق 2: ليكن u, v من مجموعة الرؤوس بحيث أن $d(u,v) = diam(G)$ وليكن $w \in Z(G)$ بحسب متراجحة المثلث في تابع المسافة إن

$$d(u,v) \le d(u,w) + d(w,v)$$

$$diam(G) \le d(u,w) + d(w,v) \le e(w) + e(w)$$

$$= rad(G) + rad(G)$$

$$diam(G) \le 2\,rad(G).$$

الترابط في البيان:

البيان المترابط يتألف من مكون واحد فقط ويسمى مركبة البيان

- البيان غير المترابط مكون من مجموعة من البيانات الجزئية المترابطة كل منها يشكل مركبة من مركبات هذا البيان

$K(G) = 1 \Leftrightarrow$ البيان مترابط

$K(G) \geq 2$ البيان غير مترابط.

مبرهنة: ليكن $G(p,q)$ بيان مترابط عندئذٍ $p-1 \le q$

الاثبات:

سوف نبرهن باستخدام الاستقراء الرياضي

نستقرأ على عدد الرؤوس

* عندما $p=1$ إن $q=0$ والمبرهنة محققة من أجل قيمة ابتدائية

** نفرض أن المبرهنة محققة من أجل كل البيانات التي عدد رؤوسها اقل تماماً من p.

نميز بين حالتين:

ⓐ نفرض أن كل رأس في هذا البيان درجته تساوي 2 على الأقل

نعلم أن $\sum_{v_i \in V} \rho(v_i) = 2q$

إذاً: $2p \leq \sum_{v_i \in V} \rho(v_i) = 2q$

$2p \leq 2q$

$p \leq q$

ولكن $p-1 < p \leq q$

$p-1 \leq q$

ⓑ نفرض وجود رأس واحد على الأقل درجته تساوي 1 نحذف مع ضلعه الوحيد نحصل على بيان جديد عدد رؤوسه $p-1$ وعدد أضلاعه $q-1$

$p-1-1 \leq q-1$

بحسب الفرض بالاستقراء نضيف 1 إلى طرفي التراجح

$p-1 \leq q$

وهو المطلوب

تعريف: ليكن $G(V,E)$ بياناً مترابطاً نقول عن مجموعة من الرؤوس $U \subseteq V$ أنها مجموعة قاطعة إذا كانت $K(G-U) > K(G)$ إذا كانت $U = \{u\}$ ~~ka~~ وحيدة العنصر عندئذٍ

u رأس قاطع $\Longleftrightarrow$ $K(G-u) > K(G)$

مبرهنة: ليكن $G(V,E)$ بياناً مترابطاً و $v \in G$ عندئذٍ v رأس قاطع إذا وفقط إذا وجد رأسين متمايزين $u, w \in V$ بحيث أنه كل مسار يربط u مع w يمر ب v.

الاثبات بالاتجاه الأول:

ليكن $v \in V$ هو رأس قاطع عند حذفه V سوف يصبح $G - v$ مركبتين على الأقل ولتكونا G_1, G_2 وليكن $u \in V(G_1)$ وليكن $w \in V(G_2)$

- إن u, w بينهما مسار واحد على الأقل في G لأن G مترابط ولكن عند حذف v حذفت معه كل هذه المسارات مما يعني أن أي مسار بين u و w في G يمر حتماً وحكماً ب v.

الاثبات بالاتجاه الثاني: لنفرض وجود رأسين $u, w \in V(G)$ بحيث أن أي مسار بينهما يمر ب v بالتالي عند حذف V سوف يزيد عدد مركبات البيان G ويصبح 2 على الأقل إذاً v هو رأس قاطع.

تعريف: ليكن $G(V,E)$ بياناً و $S \subseteq E$ نقول أن S يشكل أضلاع قاطعة إذا أدى حذفها لزيادة عدد مركبات البيان $S = \{e\}$ نقول أن e جسراً.

وجود رأس قاطع في البيان مترابط.

وجود جسر في البيان مترابط.

مبرهنة: ليكن $G(V,E)$ بياناً عندئذٍ $e \in E(G)$ يكون جسراً إذا وفقط إذا وجد رأسان $u, v \in V(G)$ بحيث أن أي مسار يصل بين u و v يشكل e ضلعاً فيه

مبرهنة: ليكن $G(V,E)$ بياناً مترابطاً عندئذٍ الضلع $e \in E(G)$ جسر إذا وفقط إذا كان لا يقع على حلقة في G.

الإثبات:

لنفترض أنّ $e=xy$ جسر في G إنّ جميع المسارات بين رأسين ما u و v من V يشكل e جزءاً منها

لنفترض أنّ مسار $u-v$ هو P في البيان $G-e$

لدينا

$P_1: u-x$ ، $P_2: v-y$

إذا كان $e=xy$ يقع على ضلع ما عندئذٍ يوجد مسار $x-y$ في $G-e$ وبالتالي $P_2 xy P_1$ مسار في $G-e$ يصل بين u و v

وهنا تناقض كون e جسر إذاً e لا يمكن أن يقع على حلقة.

بالعكس: لدينا $e=xy$ لا يقع على حلقة في G ولنثبت أنّه جسر

* لنفرض أنّ $e=xy$ ليس جسراً وبالتالي xy ينتميان لنفس المركبة في $G-e$ وبالتالي يوجد مسار $P: x-y$ في $G-e$

إنّ P مع e يشكل حلقة في G $P \cup e$ حلقة وهنا يتناقض الفرض إذاً e جسر.

انتهت المحاضرة