كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : معادلات تفاضلية2

المحاضرة : الثالثة/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Z مكتبة

~~[illegible]~~

نظرية: إذا كانت x_0 نقطة شاذة نظامية بالنسبة للمعادلة $y''+P(x)y'+q(x)y=0$ فإنه يوجد لها حل واحد على الأقل قابل للنشر بجوار النقطة x_0 على الشكل $y=(x-x_0)\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-x_0)^n$

وتكون هذه السلسلة متقاربة على الأقل في منطقة تقارب نشر التابعين P_1 و q_1

$$P_1=(x-x_0)P(x) \quad , \quad q_1=(x-x_0)^2q(x)$$

الطريقة العملية للحل:

إذا كانت $x=x_0\neq 0$ نقطة شاذة عندها نجري التحويل $z=x-x_0$ نعوضه في المعادلة ومنه ثم ~~نجري~~ نوجد الحل منشوراً بجوار $z=0$

- إذا كانت $x_0=0$ نقطة شاذة نظامية للمعادلة عندها نفرض

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-x_0)^{n+\alpha}$$

بالاشتقاق:

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+\alpha)C_n x^{n+\alpha-1}$$

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+\alpha)(n+\alpha-1)C_n x^{n+\alpha-2}$$

بعد توحيد القوى والمجالات نطابق بين أمثال x من الدرجات المختلفة نحصل على:

① من اشتقاق x^{n+k} نحصل على الدستور التدريجي وبدلالة n و k.

② من اشتقاق الحد الاول من السلسلة الناتجة نحصل على المعادلة المميزة نوجد جذورها ولتكن k_1 و k_2 وذلك بعد فرض $C_0 \neq 0$

نراعي الحالات التالية:

a) الفرق بين k_1 و k_2 عدد غير صحيح عندها نفرض $C_0 = 1$ ونعوض عن قيمة k_1 في الدستور التدريجي فنحصل على الثوابت C_n وبالتالي الحل الخاص الاول ونعوض عن k_2 في الدستور التدريجي فنحصل على ثوابت أخرى C_n وبالتالي الحل الخاص الثاني.

b) الفرق بين k_1 و k_2 عدد صحيح وبتعويض قيمة k_1 و k_2 في الدستور التدريجي يمكن الحصول على الثوابت C_n مقابلة لكل من k_1 و k_2 بعد الفرض $C_0 = 1$ عندها نوجد الحل الخاص الاول والحل الخاص الثاني على الترتيب.

c) الفرق بين k_1 و k_2 في الدستور التدريجي فإنه لا يمكن الحصول على جميع الثوابت C_n المقابلة لاحد الجذرين وليكن k_2 عندها نحصل على الحلين الخاصين باحدى الطريقتين:

C_1ـ نضع $C_0 = 1$ ونعوض عن k_1 في الدستور التدريجي ونوجد C_n المقابلة وبالتالي y_1 ومن ثم نحسب y_2 من العلاقة

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P_0 dx}}{y_1^2} dx$$

C_2 نكتب y بعد التعويض عن C_n بالدستور التدريجي الذي ~~حصلنا~~ حصلنا عليه $y(x,\alpha,C_0)$ ومنه ~~نعوض~~ ثم نضع $C_0 = \alpha - \alpha_2$ حيث α_2 جذر لم نجد من أجله ثوابت ونعوض في $y(x,\alpha,C_0)$ فنجد y و تكون صيغة الحل العام:

$$y = A\bar{y}\Big|_{\alpha=\alpha_2} + B\frac{\partial \bar{y}}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=\alpha_2}$$

$$\bar{y} = \sum C_n \cdot x^{n+\alpha}\Big|_{C_0=\alpha-\alpha_2}$$

d) الفرق بين α_1 و α_2 صفر $\alpha_1 = \alpha_2$ نضع $C_0 = 1$ فنجد $y(x,\alpha)$ و يكون $y_1 = y(x,\alpha_1)$

إما $y_2 = \frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=\alpha_1}$ أو $y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2}dx$

مثال:

أوجد الحل العام منشوراً بجوار $x_0 = 0$ للمعادلة:

$$4xy'' + 2y' + y = 0$$

نقسم على أمثال y'':

$$y'' + \frac{1}{2x}y' + \frac{1}{4x}y = 0$$

$P_1 = (x - x_0)P(x)$, $q_1 = (x - x_0)^2 q(x)$

$$P_1 = x \cdot \frac{1}{2x} = \frac{1}{2} \quad , \quad q_1 = \frac{1}{4}x$$

نقطة شاذة نظامية نفرضه

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+\alpha} \quad , \quad y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha)C_n x^{n+\alpha-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha)(n+\alpha-1) C_n \, x^{n+\alpha-2}$$

نضرب المعادلة بـ x

$$4x^2 y'' + 2x y' + x y = 0$$

$$4\sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha)(n+\alpha-1) C_n x^{n+\alpha} + 2\sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha) C_n x^{n+\alpha} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+\alpha+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[4(n+\alpha)(n+\alpha-1) + 2(n+\alpha)\right] C_n \, x^{n+\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{n-1} x^{n+\alpha} = 0$$

نعوض مكان n حسب دليله السلسلة الموجودة

$$[4\alpha(\alpha-1) + 2\alpha] C_0 \, x^{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \left((n+\alpha)(4(n+\alpha-1)+2) C_n + C_{n-1}\right) x^{n+\alpha} = 0$$

$$= (4\alpha(\alpha-1) + 2\alpha) C_0 x^{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} 2(n+\alpha)[2n+2\alpha-1] C_n + C_{n-1}] x^{n+\alpha} = 0$$

$\cancel{x^{\alpha} : (4\alpha(\alpha-1)}$

$x^{\alpha} : (4\alpha(\alpha-1) + 2\alpha) C_0 = 0 \; ; \; C_0 \neq 0$

$\Rightarrow 2\alpha(2\alpha-1) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{2} , \alpha_2 = 0$

$x^{n+\alpha} : 2(n+\alpha)(2n+2\alpha-1) C_n + C_{n-1} = 0$

$$\Rightarrow C_n = \frac{-1}{2(n+\alpha)(2n+2\alpha)-1} C_{n-1} \rightarrow$$

وهو الدستور التدريجي.

الفرق بين α_1 و α_2 عدد غير صحيح نفرض $C_0 = 1$

لإيجاد y_1 نعوض α_1 بالدستور التدريجي:

$$C_n = \frac{-1}{2(n+\frac{1}{2})(2n)} C_{n-1} \quad : y_1$$

$$C_n = \frac{-1}{(2n+1)(2n)} C_{n-1}$$

$$C_1 = -\frac{1}{2\times 3} = -\frac{1}{3!} \; ; \; C_2 = -\frac{1}{5\times 4} - \frac{1}{3!} = \frac{1}{5!}$$

$$C_3 = -\frac{1}{7!}$$

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{n+\frac{1}{2}}$$

$$n + \frac{1}{2} \Rightarrow 2n+1 = \frac{1}{2}(2n+1)$$

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (\sqrt{x})^{2n+1} = \sin\sqrt{x}$$

$X_2 = 0 : y_2$

$$C_n = \frac{-1}{2n(2n-1)} C_{n-1}$$

$$C_1 = -\frac{1}{2} , \; C_2 = -\frac{1}{4\times 3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4!}$$

$$C_3 = -\frac{1}{6!} \; .... \; C_n = \frac{(-1)^n}{2n!}$$

$$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} x^{n+X}$$

$$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} \cdot x^{\frac{1}{2}\cdot 2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} \sqrt{x}^{2n} = \cos\sqrt{x}$$

$y = Ay_1 + By_2 = A\sin\sqrt{x} + B\cos\sqrt{x}$.

$$y = A\sin\sqrt{x} + B\cos\sqrt{x}$$

مثال:

$xy'' - 3y' + xy = 0$ في $x = 0$

$P(x) = -\frac{3}{x}$, $q = 1$ (بعد التقسيم على أمثال y'')

$P_1 = (x - x_0)P(x) = x \cdot -\frac{3}{x} = -3$.

$q = (x - x_0)^2 q(x) = x^2 \cdot 1 = x^2$.

$x=0$ نقطة شاذة نظامية:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r} , \quad y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) C_n x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) C_n x^{n+r-2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) C_n x^{n+r-1} - 3\sum_{n=0}^{\infty} (n+r) C_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r+1} = 0.$$

$$\cancel{\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) C_n x^{n+r-1} - 3\sum_{n=0}^{\infty} (n+r) C_n x^{n+r-1}}$$

$$\cancel{+\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r+1} = 0}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1-3) C_n x^{n+r-1} + \sum_{n=2}^{\infty} C_{n-2} x^{n+r-1} = 0$$

$$\alpha(\alpha-4)C_0 x^{\alpha-1} + (1+\alpha)(\alpha-3)C_1 x^{\alpha} + \sum_{n=2}^{\infty}\left((n+\alpha)(n+\alpha-4)C_n + C_{n-2}\right)x^{n+\alpha-1} = 0$$

$x^{\alpha-1}$ $\alpha(\alpha-4)C_0 = 0$

x^{α} : $(1+\alpha)(\alpha-3)C_1 = 0$

$x^{n+\alpha}$: $(n+\alpha)(n+\alpha-4)C_n + C_{n-2} = 0$

$\alpha(\alpha-4)C_0 = 0$; $C_0 \neq 0 \Longrightarrow \alpha(\alpha-4) = 0 \Longrightarrow \boxed{\alpha_1 = 0 ,\ \alpha_2 = 4}$

x^{α} : $(1+\alpha)(\alpha-3)C_1 = 0 \Longrightarrow C_1 = 0$

$x^{n+\alpha-1}$: $(n+\alpha)(n+\alpha-4)C_n + C_{n-2} = 0$

$$C_n = \frac{-C_{n-2}}{(n+\alpha)(n+\alpha-4)}$$

وهو الدستور التدريجي.

نوجد $y(x,\alpha,C_0)$.

$$C_2 = \frac{-C_0}{(2+\alpha)(\alpha-2)} \quad , \quad C_3 = C_5 = C_7 = \dots = 0$$

$$C_4 = \frac{-C_2}{(4+\alpha)(\alpha)} = \frac{C_0}{(\alpha-2)(\alpha)(\alpha+2)(\alpha+4)}$$

$$C_6 = \frac{-C_4}{(6+\alpha)(\alpha+2)} = \frac{-C_0}{(\alpha-2)\alpha(\alpha+2)^2(\alpha+4)(\alpha+6)}$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+\alpha}$$

$$y(x,\alpha,C_0) = C_0 x^{\alpha}$$

$$= C_0 x^{\alpha}\left(1 - \frac{1}{(2+\alpha)(\alpha-2)}x^2 + \frac{1}{(\alpha-2)(\alpha)(\alpha+2)(\alpha+4)}x^4 - \frac{1}{(\alpha-2)\alpha(\alpha+2)^2(\alpha+4)(\alpha+6)}x^6 + \cdots\right)$$

$$C_0 = \alpha \quad , \quad C_0 = \alpha$$

$$\bar{y} = x^{\alpha}\left(\alpha - \frac{\alpha}{(2+\alpha)(\alpha-2)}x^2 + \frac{1}{(\alpha-2)(\alpha+2)(\alpha+4)}x^4 - \frac{1}{(\alpha-2)(\alpha+2)^2(\alpha+4)(\alpha+6)}x^6 + \cdots\right)$$

$$\bar{y}\Big|_{\alpha=0} = \frac{1}{(-2)(2)(4)}x^4 - \frac{1}{-2(4)(4)\cdot 6}x^6 + \cdots$$

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial \alpha} = \ln(x)\cdot\bar{y} + x^{\alpha}\Big(1 - \Big(\frac{1}{(2+\alpha)(\alpha-2)} + \frac{\alpha-1}{(2+\alpha)^2(\alpha-2)}$$

$$+ \alpha\frac{-1}{(\alpha+2)(\alpha-2)^2}\Big)x^2 + \Big(\frac{-1}{(\alpha-2)^2(\alpha+2)(\alpha+4)} - \frac{1}{(\alpha-2)(\alpha+2)^2(\alpha+4)}$$

$$- \frac{1}{(\alpha-2)(\alpha+2)(\alpha+4)^2}\Big)x^4 + \cdots$$

$$y_2 = \frac{\partial y}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} = \ln x \cdot \bar{y}\Big|_{\alpha=0} + \left(1+\frac{1}{4}\right)x^2 + \left(\frac{-1}{2\cdot4\cdot4} + \frac{1}{2\cdot4\cdot4}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{(+2)(4)^2(2)}\right)x^4 + \cdots \Longrightarrow y = Ay_1 + By_2$$

$\cancel{x(x-4)C_0 x^{x-1} + (1+x)(x-3)C_1 x^{x} + \sum_{n=2} \dots}$

$= (A + \ln x\, B)\, y \Big|_{x=0}$

انتهت المحاضرة