كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : معادلات تفاضلية2

المحاضرة : الثانية/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

القسم: الرياضيات

السنة: الثانية — المحاضرة: الثانية نظري

المادة: معادلات تفاضلية 1

- طريقة تغيير المتحوّل:

$$y'' + P(x)\,y' + q(x)\,y = R(x)$$

نستبدل المتغيّر x بالمتغيّر Z

$$Z = f(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dZ}\cdot\frac{dZ}{dx} = y'_Z \cdot \frac{dZ}{dx} = y'_Z\, Z'_x$$

$$\frac{d^2y}{d^2x} = y''_Z\left(\frac{dZ}{dx}\right)^2 + y'_Z\,\frac{d^2Z}{d^2x}$$

$$= y''_Z \cdot Z'^2_x + y'_Z \cdot Z''_x$$

نعوّض بالمعادلة

$$Z'^2_x \cdot y''_Z + y'_Z \cdot Z''_x + P \cdot Z'_x \cdot y'_Z + q\,y = R(x)$$

$$= Z'^2_x \cdot y''_Z + (Z''_x + P Z'_x)\,y'_Z + \frac{q}{Z'^2_x} = R(x)$$

نقسّم على أمثال y''

$$y''_Z + \frac{(Z''_x + P Z'_x)\,y'_Z}{Z'^2_x} + \frac{q\,y}{Z'^2_x} = \frac{R(x)}{Z'^2_x}$$

حيث P, q, R أمثال و $Z = f(x)$

$$\frac{Z''_x + P Z'_x}{Z'^2_x} = b \quad , \quad a = \frac{q}{Z'^2_x}$$

$Z_x'^2 = \frac{q}{a}$ ، $Z_x' = \sqrt{\frac{q}{a}}$

$$Z_x'' = \frac{\frac{q'}{a}}{2\sqrt{\frac{q}{a}}} = \frac{q'}{2\sqrt{q}\cdot\sqrt{a}} \Longrightarrow \frac{\frac{q'}{2\sqrt{q}\cdot\sqrt{a}} + p\cdot\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{a}}}{q/a} = b$$

~~نو~~ نوحّد المقامات في البسط

$$\frac{q'+2pq}{q\sqrt{q}} = \frac{2b}{\sqrt{a}} = c$$

وهو الشرط الذي يجب أن يتحقق باستخدام هذه الطريقة ~~حيث~~ عندما نفرض $Z_x' = \sqrt{kq}$

$$Z(x) = \int \sqrt{qk}\, dx$$

مثال:

$$\cos x\, y'' + \sin x\, y' - 2y\cos^3 x = 2\cos^5 x$$

معادلة خطية من المرتبة الثانية

نقسم على أمثال y''

$$y'' + \frac{\sin x}{\cos x} y' - 2\cos^2 x - 2\cos^4 x$$

$$\frac{q'+2pq}{q\sqrt{q}} = c \quad ; \quad p = \frac{\sin x}{\cos x} \ , \ q = -2\cos^2 x$$

$$q' = 4\sin x\cos x = \frac{4\sin x\cos x + 2\frac{\sin x}{\cos x} - 2\cos^2 x}{q\sqrt{q}}$$

$= 0$ (ثابتة)

$Z'_x = \sqrt{kq}$ ، $k = -\frac{1}{2}$ (اختياري) . نبحث عن Z'_x

$Z'_x = \sqrt{-\frac{1}{2} \cdot -2\cos^2 x} = \cos x$

$\Longrightarrow \quad Z_x = \sin x = \int \cos x \, dx$

نفرض $Z = \sin x$ ونكمل بالطريقة:

$y'_x = y'_Z \cdot Z'_x = y'_Z \cdot \cos x$

$y''_x = y''_Z \cdot Z'^2_x - y'_Z \cdot Z_x = y''_Z \cdot \cos^2 x - y'_Z \cdot \sin x$

$= y''_Z \cdot \cos^2 x + \left(\frac{\sin x}{\cos x} \cos x - \sin x \right) y'_Z - 2\cos^2 x \, y = 2\cos^4 x$

نقسم على $\cos^2 x$

$y''_Z - 2y = 2\cos^2 x$

$y''_Z - 2y = 2\cos^2 x$

$y''_Z - 2y = 2\cos^2 x$

$y''_Z - 2y = 2(1 - \sin^2 x)$

$y''_Z - 2y = 2(1 - Z^2)$

$m^2 - 2 = 0$

$(m - \sqrt{2})(m + \sqrt{2}) = 0$

$m_1 = \sqrt{2}, \ m_2 = -\sqrt{2}$

$y_h(Z) = C_1 e^{\sqrt{2}Z} + C_2 e^{-\sqrt{2}Z}$

$y_p = AZ^2 + BZ + C \quad \text{------} \times -2$

$y'_p = 2AZ + B$

$y'' = 2A \quad \text{------} \times 1$

$-2AZ^2 - 2BZ - 2c + 2A = 2(1 - Z^2)$

$-2AZ^2 = -2Z^2 \Rightarrow A = 1 ,\ B = 0 ,\ C = 0$

$y_p = Z^2$

$y = y_p + y_h$

$y_h = C_1 . e^{\sqrt{2}Z} + C_2 . e^{-\sqrt{2}Z}$

$y(x) = C_1 . e^{\sqrt{2}\sin x} + C_2 . e^{-\sqrt{2}\sin x} + \sin^2 x$

حل المعادلات التفاضلية الخطية بطريقة النشر بالسلاسل القوى:

تعريف: ليكن لدينا التابع $y = f(x)$ يقال عن هذا التابع أنه تحليلي في x_0 إذا كان التابع وجميع مشتقاته معرفة ومستمرة في هذه النقطة وجوارها عندئذٍ نسمي x_0 نقطة عادية لـ $f(x)$ وعندها يكون التابع $f(x)$ قابلاً للنشر بجوار هذه النقطة في سلسلة تايلور:

$$y = f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots = \sum_{n=0} C_n (x - x_0)^n$$

C_1 و C_0 ثوابت معلومة

إذا كان $f(x)$ غير تحليلي في النقطة x_0 أي أن $f(x)$ أو أحد مشتقاته غير معرف في x_0 عندئذٍ تدعى x_0 نقطة شاذة للتابع $f(x)$ وعندئذٍ لا يمكن نشر $f(x)$ بجوار الـ $f(0)$ في سلسلة تايلور.

مثال:

$f(x) = \sin x$ تابع تحليلي بجوار الـ x يساوي الصفر

$f(x) = x \ln |x|$ (غير تحليلي)

تعريف: لتكن لدينا المعادلة

$a_0(x) y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = 0 \quad \dots (1)$

والتي تكتب بالشكل النظامي (بالتقسيم على أمثال y'')

$$y'' + P(x)y' + q(x)y = 0 \quad \text{------} (2)$$

نقول أن النقطة x_0 نقطة عادية للمعادلة إذا كانت نقطة عادية بالنسبة لـ $P(x)$ و $q(x)$ ونقول أن النقطة x_0 هي نقطة شاذة للمعادلة إذا كانت نقطة شاذة لأحد التابعين $P(x)$ أو $q(x)$

مثال: $xy'' + 2y' + xy = 0$

الجواب: $x=0$ نقسم على أمثال y''

$$x + \frac{2}{x}y' + y = 0$$

$x=0$ نقطة شاذة لـ $P(x)$ فهي شاذة للمعادلة

$x=1$ نقطة عادية بالنسبة لـ $P(x)$ و $q(x)$ فهي عادية

ملاحظة: يمكن أن تكون النقطة $x=\infty$ نقطة عادية أو شاذة للمعادلة وللتأكد من ذلك نجري التحويل $x=\frac{1}{t}$ ونعوض بالمعادلة وندرس النقطة $t=0$ التي توافق $x=\infty$

مثال:

$$y'' + 2y' + y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = y'_t(-t^2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \left(y''_t(-t^2) - 2t(y'_t)\right)(-t^2)$$

$$= t^4 y''_t + 2t^3 y'_t$$

نعوض بالمعادلة:

$$t^4 y''_t + 2t^3 y'_t - 2t^2 y'_t + y = 0$$

$$y''_t + \left(\frac{2t^3 - 2t^2}{t^4}\right) y'_t + \frac{1}{t^4} y = 0$$

لاحظ أن النقطة $x=0$ نقطة شاذة للمعادلة.

تعريف: لتكن لدينا المعادلة (2) ولتكن x_0 نقطة شاذة للمعادلة عندئذ تسمى x_0 نقطة شاذة نظامية إذا كانت نقطة عادية لكل من التابعين $P_1(x)$ و $q_1(x)$ ،

$$P_1(x) = (x-x_0)P(x) \quad , \quad q_1(x) = (x-x_0)^2 q(x)$$

أي أن P_1 و q_1 معرفين ومستمرين وقابلين للاشتقاق في x_0.

مثال: $x^2y'' - 2xy' + y = 0$ و $x=0$

نقسم على أمثال y'':

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0$$

$$P_1 = -2 \quad , \quad q_1 = 1$$

$x=0$ نقطة عادية بالنسبة لكل من P_1 و q_1 ومنه $x=0$ نقطة شاذة نظامية.

إيجاد الحل العام لمعادلة تفاضلية في جوار نقطة عادية:

نظرية: إذا كانت x_0 نقطة عادية للمعادلة $y''+P(x)y'+q(x)y=0$ فإنه يوجد حلان مستقلان خطياً وقابلان للنشر في سلسلة تايلور في جوار x_0 وسلسلتاهما متقاربتان على الأقل في المنطقة المشتركة لتقارب سلسلتي نشر التابعين $P(x)$, $q(x)$ وبالتالي الحل العام يعطى منشوراً حسب تايلور

$$y = A\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n + B\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n \quad \ldots (3)$$

و a_n و b_n ثوابت تعين قيمها و A و B ثابتان اختياريان.

الطريقة العملية للحل:

① إذا كانت $x = x_0$ نقطة عادية للمعادلة نفرض $t = x - x_0$ ونعوض بالمعادلة ومن ثم نبحث عن حل المعادلة الجديدة بجوار النقطة العادية $t = 0$.

② إذا كانت $x = 0$ نقطة عادية عندئذٍ نفرض أن حل المعادلة $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ و $y' = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1}$ و $y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$

بعد التعويض في المعادلة يوحد القوى ومجالات السلاسل ونطابق أمثال x من الدرجات المختلفة نحصل على علاقة تعيين $c_n, \ldots, c_3, c_2$ بدلالة c_0 و c_1

ط1:

إذا وضعنا $c_0 = 1$ و $c_1 = 0$ نحصل على قيم $c_2, c_3, \ldots, c_n$ والتي تعيين الحل الخاص الأول y_1

و $c_0 = 0$ و $c_1 = 1$ نحصل على قيم $c_2, c_3, \ldots, c_n$ والتي تعيين الحل الخاص الثاني y_2 $\quad y_{(x)} = A y_1 + B y_2$

ط2: نخرج c_0 و c_1 عوامل مشتركة

مثال:

$$(x^2 - 1) y'' + 6x y' + 4y = 0$$

أوجد الحل العام بجوار $x = 0$.

الحل:

نقسم على أمثال y'':

$$y'' + \frac{6x}{(x^2-1)} y' + \frac{4}{x^2-1} y = 0$$

$x = 0$ نقطة عادية بجوار $P(x)$ و $q(x)$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot x^n$$

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot C_n \cdot x^{n-1}$$

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) C_n \cdot x^{n-2}$$

نعوّض بالمعادلة :

$$(x^2-1)\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) C_n \, x^{n-2}+6x\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot C_n \cdot x^{n-1}$$
$$+4\sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot x^n=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) C_n \cdot x^n-\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) C^n \cdot x^{n-2}+\sum_{n=0}^{\infty} 6n\, C_n \cdot x^n$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty} 4 C_n \cdot x^n$$

نفرض $m=n-2$

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1)\, C_{m+2} \cdot x^m$$

نفرض $n=m$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[n(n-1) C_n-(n+2)(n+1) C_{n+2}+(6n+4)\, C_n\right] x^n=0$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+4)(n+1) C_n-(n+2)(n+1)\, C_{n+2}\right] x^n=0$$

$$=(n+2)(n+1)\, C_{n+2}=(n+1)(n+4)\, C_n$$

$$C_{n+2}=\frac{n+4}{n+2} C_n$$

نفرض $C_0=1$ و $C_1=0$

C_2 ؛ $n=0 \Longrightarrow C_2=2C_0=2$

C_3 ؛ $n=1 \Longrightarrow C_3=\frac{5}{3} C_1=0$

C_4 ؛ $n=2 \Longrightarrow 2 \cdot \frac{6}{4}=3$

$y_1 = 1 + 2x^2 + 3x^4 + \cdots$

بشكل سلسلة $\Leftarrow$

$$y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, x^{2k}$$

$y_2 =$ ؛ $C_0 = 0$ ، $C_1 = 1$

$C_2 = C_4 = \cdots = 0$ ،

$C_3 = \frac{5}{3}$ ، $C_4 = 0$

$C_5 = \frac{7}{3}$ ؛

$y_2 = x + \frac{5}{3}x^3 + \frac{7}{3}x^5 + \cdots$

$$y_2 = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+3)\, x^{2k+1}$$

$$y = A y_1 + B y_2$$

انتهت المحاضرة