كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل عددي1

المحاضرة : الثالثة/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

Sudject

Year: Month: Date: NOTE BOOK

المحاضرة الثالثة - التحليل العددي 1 - السنة الثانية - قسم الرياضيات - نظري - الحساب العددي لقيم كثيرات الحدود ومشتقاتها.

كثيرات الحدود:

نقول أن $P_n(x)$ هي كثيرة حدود من الدرجة $n$ إذا كتبت بالصيغة:

$$\# \quad P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

حيث $a_0, a_1, \dots, a_n$ معاملات حقيقية ثابتة ، في دراسة كثيرات الحدود $P_n(x)$ نميز الخواص التالية:

[1] وفق خوارزمية القسمة الإقليدية يمكن كتابة أي كثيرة حدود بالشكل:

$$P_n(x) = (x-b)\,Q_{n-1}(x) + R_0 \quad (*)$$

حيث $Q_{n-1}(x)$ هي كثيرة حدود من الدرجة $n-1$ وتمثل ناتج قسمة $P_n(x)$ على كثيرة الحدود الخطية $(x-b)$ حيث $b$ عدد حقيقي من $\mathbb{R}$.

$R_0$ هي كثيرة حدود من الدرجة صفر (ثابت عددي) يمثل باقي قسمة $P_n(x)$ على $(x-b)$ ، ويحقق العلاقة التالية:

$$R_0 = P_n(b)$$

- تنتج هذه العلاقة بوضوح من $(*)$ بتعويض $x = b$.

[2] إذا كان $x = b$ جذراً لكثيرة الحدود $P_n(x)$ فإن $R_0 = 0$ وبالتالي:

$$P_n(x) = (x-b)\,Q_{n-1}(x)$$

[3] كل كثيرة حدود من الدرجة $n$ مثل $P_n(x)$ تمتلك $n$ جذر على الأكثر ، ونفرض أن هذه الجذور هي $b_i \,;\, i = 1, 2, \dots, n$ عندئذ بتطبيق الخاصة الثانية $n$ مرة متتالية نحصل على:

$$P_n(x) = A(x-b_1)(x-b_2)\dots(x-b_n)$$

ونلاحظ أن $A$ هي معامل $x^n$ وبالمطابقة مع $\#$ نجد أن $A = a_n$

[4] يوجد كثيرة حدود وحيدة تتطابق مع الدالة $f(x)$ بـ $(n+1)$ نقطة مختلفة

Sudject

Year: Month: Date: NOTE BOOK

## جذور كثيرات الحدود: (نظرية ديكارت):

[1] إن لكثيرة الحدود $P_n(x)$ عدداً من الجذور الحقيقية الموجبة يساوي عدد التغير الحاصل في إشارات حدود $P_n(x)$ أو ينقص عنه بعدد زوجي.

[2] إن لكثيرة الحدود $P_n(x)$ عدداً من الجذور الحقيقية السالبة يساوي عدد التغير الحاصل في إشارات حدود $P_n(-x)$ أو ينقص عنه بعدد زوجي.

مثال: أوجد عدد الجذور الموجبة والسالبة لكل من كثيرات الحدود التالية:

[1] $P(x) = x^2 + x - 7$

عدد الجذور الموجبة هو 1 لأن الإشارة في متتالية الأمثال $+1, +1, -7$ تغيرت مرة واحدة.

عدد الجذور السالبة: نحسب $P(-x)$ فنجد أن $P(-x) = x^2 - x - 7$ ومتتالية الأمثال هي $+1, -1, -7$ وبالتالي عدد الجذور السالبة هو أيضاً واحد لأن متتالية الأمثال تغيرت ضمنها الإشارة مرة واحدة فقط.

[2] $P(x) = x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 + x + 2$

عدد الجذور الموجبة: $+1, +1, -4, -3, +1, +2$ بالتالي عدد الجذور الموجبة هو 2 أو 0

نحسب $P(-x) = -x^5 + x^4 + 4x^3 - 3x^2 - x + 2$ وبالتالي متتالية الأمثال هي $-1, +1, +4, -3, -1, +2$ وبالتالي عدد الجذور السالبة هو 3 أو واحد

ملاحظة: قبل كتابة متتالية الأمثال نرتب $P_n(x)$ وفق الصيغة المكتوبة في #.

NOTE BOOK

Sudject
Year: Month: Date: NOTE BOOK

## نظرية بودان - فورييه:

إن عدد الجذور الحقيقية لكثيرة الحدود $P_n(x)$ الواقعة في المجال $[a,b]$ تعطى بالعلاقة $|V_a - V_b|$ أو ينقص عنه بعدد زوجي حيث:

$V_a$: عدد التغير الحاصل في الإشارة لمتتالية القيم $P_n(a), P'_n(a), \dots, P_n^{(n)}(a)$

$V_b$: عدد التغير الحاصل في الإشارة لمتتالية القيم $P_n(b), P'_n(b), \dots, P_n^{(n)}(b)$

مثال: أوجد عدد الجذور الحقيقية في المجال $[-2,2]$ لكثيرة الحدود:

$$P_4(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 - 5x + 1$$

نحسب $\{V_a\} = \{P_n(a), P'_n(a), P_n^{(2)}(a), P_n^{(3)}(a), P_n^{(4)}(a)\}$

$$\{V_{-2}\} = \{P_4(-2), P'_4(-2), P''_4(-2), P'''_4(-2), P_4^{(4)}(-2)\}$$

$P_4(-2) = 16 + 24 + 4 + 10 + 1 = 55$

$P'_4(-2) = -32 - 36 - 4 - 5 = -77$

$P''_4(-2) = 48 + 36 + 2 = 86$

$P'''_4(-2) = -66$ , $P_4^{(4)}(-2) = 24$

$$\{V_{-2}\} = \{55, -77, 86, -66, 24\}$$

$$V_{-2} = 4$$

نحسب الآن $V_b = V_2$

$P_4(+2) = -13$ , $P'_4(+2) = -5$ , $P''_4(+2) = 14$ , $P'''_4(+2) = 30$ , $P_4^{(4)} = 24$

$\{V_2\} = \{-13, -5, 14, 30, 24\}$

$\Rightarrow V_2 = 1$

وبالتالي عدد الجذور الحقيقية في المجال $[-2,2]$ يساوي

$$V_b - V_a = V_2 - V_{-2} = 4 - 1 = 3 \text{ أو } 1$$

نجد أن الطريقة في المثال السابق تحتاج لعدد كبير من الحسابات عند حساب مشتقة كثيرة الحدود أو كل من مشتقاتها، عالجت طريقة هورنر هذه المشكلة فمن خلاله الحساب بطريقة تعاودية وفق ما يلي:

## طريقة هورنر لحساب قيمة كثيرة حدود ومشتقاتها عند نقطة ما:

* نكتب أمثال كثيرة الحدود مرتبة من $a_n$ في أقصى اليسار إلى $a_0$ في صف واحد بحيث نضع 0 مكان الأمثال المعدومة.
* نترك سطراً فارغاً ونحته خطاً وعلى اليسار نكتب قيمة النقطة المراد حساب كثيرة الحدود ومشتقاتها عندها أي $x = c$
* تحت الخط مباشرة أي في السطر الثالث نكتب $b_n$ تحت $a_n$ مباشرة ثم نضرب $c$ بالعدد $b_n$ ونضع ناتج الضرب أي $cb_n$ في السطر الفارغ (الثاني) تحت $a_{n-1}$ مباشرة ونرمز لجمعهما عمودياً $b_{n-1}$ ونضعه تحتهما في السطر (الثالث)، نكرر هذه العملية حتى نصل إلى $b_1$ ونضربه بالعدد $c$ ونضع ناتج الضرب تحت $a_0$ مباشرة فيكون ناتج جمع $a_0$ مع $cb_1$ هو $b_0$ وهو قيمة كثيرة الحدود عند $x = c$

$$\begin{array}{cccccccc}
 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\
x=c & & cb_n & cb_{n-1} & \cdots & cb_3 & cb_2 & cb_1 \\
\hline
 & b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_2 & b_1 & b_0 = P(c)
\end{array}$$

مثال 1: استخدم طريقة هورنر لحساب قيمة كثيرة الحدود $P_5(x)$ عند النقطة $x = 3$ حيث $P_5(x) = x^5 - 6x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 4x - 40$ ثم اكتب كثيرة الحدود $P_5(x)$ بالشكل $P_5(x) = (x-3)Q_4(x) + R_0$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 1 & -6 & 8 & 8 & 4 & -40 \\
x=3 & & 3 & -9 & -3 & 15 & 57 \\
 & 1 & -3 & -1 & 5 & 19 & P_5(3) = 17
\end{array}$$

$$\Rightarrow P_5(x) = (x-3)(x^4 - 3x^3 - x^2 + 5x + 19) + 17$$

ملاحظة: بما أن كثيرات الحدود دوال مستمرة وقابلة للاشتقاق نجد أن:
باشتقاق (*)

$$P_n'(x) = (x-b)\,Q_{n-1}'(x) + Q_{n-1}(x)$$

وبالتالي $P_n'(b) = Q_{n-1}(b)$

فمثلاً إذا كانت $P_4(x) = x^4 - 5x^2 + 4x - 1$ فإنه بإجراء القسمة الإقليدية على $(x-2)$ نجد:

$$P_4(x) = (x-2)(x^3 + 2x^2 - x + 2) + 3$$

ومنه يكون $P_4(2) = 3 = R_0$

بمعنى آخر قيمة كثيرة الحدود عند $x=2$ تساوي باقي قسمة $P_4(x)$ على $(x-2)$
ويكون $P_4'(2) = 2^3 + 2\cdot 2^2 - 2 + 2 = 16$ صورة العدد 2 وفق المشتق الأول لكثيرة الحدود تساوي صورته وفق ناتج قسمة $P_4(x)$ على $(x-2)$

لتعيين قيمة باقي المشتقات علينا أن نكتب:

$$P_n(x) = (x-b)\,Q_1(x) + P_n(b) = P_n(b) + (x-b)\left[Q_2(x)(x-b) + Q_1(b)\right]$$

$$P_n(x) = P_n(b) + (x-b)\left[(x-b)\left(Q_3(x)(x-b) + Q_2(b)\right) + Q_1(b)\right]$$

$$P_n(x) = P_n(b) + (x-b)\,Q_1(b) + (x-b)^2 Q_2(b) + (x-b)^3 Q_3(b) + \dots + (x-b)^n Q_n(b)$$

وباستخدام منشور تايلور لكثيرة الحدود $P_n(x)$ حول $x=b$ نجد أن:

$$P_n(x) = P_n(b) + (x-b)\frac{P_1'(b)}{1!} + (x-b)^2 \frac{P_2'(b)}{2!} + \dots + (x-b)^n \frac{P_n'(b)}{n!}$$

بالمطابقة مع ما سبق نجد:

$$\frac{P_1'(b)}{1!} = Q_1(b),\quad \frac{P_2'(b)}{2!} = Q_2(b),\quad \dots,\quad \frac{P_n'}{n!} = Q_n(b)$$

وبهذا الأسلوب نحسب مشتقات $P_n(x)$ عند نقطة ما وفق طريقة هورنر.

تمرين: استخدم طريقة هورنر لحساب قيم كثيرة الحدود $P(x)$ وجميع مشتقاتها عند النقطة $x=3$ حيث

$$P(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 7$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | -5 | 5 | 5 | -7 |
| $x=3$ | | 3 | -6 | -3 | 6 |
| | 1 | -2 | -1 | 2 | $-1 = P(3)$ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | -2 | -1 | 2 |
| $x=3$ | | 3 | 3 | 6 |
| | 1 | +1 | 2 | $8 = \frac{P'(3)}{1!} \Rightarrow P'(3) = 8$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 2 $\cancel{8}$ |
| $x=3$ | | 3 | 12 |
| | 1 | 4 | $14 = \frac{P''(3)}{2!} \Rightarrow P''(3) = 28$ |

| | | |
|---|---|---|
| | 1 | 4 |
| $x=3$ | | 3 |
| | 1 | $7 = \frac{P'''(3)}{3!} \Rightarrow P'''(3) = 42$ |

| | |
|---|---|
| | 1 |
| $x=3$ | $1 = \frac{P^{(4)}(3)}{4!} \Rightarrow P^{(4)}(3) = 24$ |

تمرين ٧: استخدم بشكل مشترك طريقة نيوتن رافسون وهورنر لإيجاد الجذر التقريبي للمعادلة:

$$P(x) = 4x^4 + 13x^3 - x + 8 = 0$$

والواقع في المجال $[-4,-3]$ بخطأ لا يتجاوز $2\times10^{-3}$ علماً أن $x_0=-3$

وفق نيوتن رافسون، العلاقة التكرارية

$$x_n = x_{n-1} - \frac{P(x_{n-1})}{P'(x_{n-1})} \quad ; \quad n \geq 1$$

$$x_1 = x_0 - \frac{P(x_0)}{P'(x_0)}$$

نوجد $P(x_0)$ , $P'(x_0)$ بطريقة هورنر

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 4 | 13 | 0 | -1 | 8 |
| $x=3$ | | -12 | -3 | 9 | -24 |
| | 4 | 1 | -3 | 8 | $-16 = P(-3)$ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 4 | 1 | -3 | 8 |
| $x=-3$ | | -12 | 33 | -90 |
| | 4 | -11 | 30 | $-82 = P'(-3)$ |

وبالتالي

$$x_1 = -3 - \frac{-16}{-82} = -3.19512$$

$$|x_1 - x_0| = |-3.19512 - -3| = 0.19512$$

$$x_2 = x_1 - \frac{P(x_1)}{P'(x_1)}$$

نوجد $P(x_1)$ , $P'(x_1)$ بطريقة هورنر

Sudject

Year: Month: Date: NOTE BOOK

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 4 | 13 | 0 | -1 | 8 |
| -3.19512 | | -12.78048 | -0.70139 | 2.24102 | -3.96520 |
| | 4 | 0.21952 | -0.70139 | 1.24102 | 4.0348 $= P(-3.19512)$ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 4 | 0.21952 | -0.70139 | 1.24102 |
| -3.19512 | | -12.78048 | 40.13377 | -125.99118 |
| | 4 | -12.56096 | 39.43238 | -124.75016 |

$= P'(-3.19512)$

$$x_2 = -3.19512 - \frac{4.0348}{-124.75016} = -3.16277$$

$$|x_2 - x_1| = 0.03235 > \varepsilon$$

$$x_3 = x_2 - \frac{P(x_2)}{P'(x_2)}$$

لنوجد قيمتي $P(x_2)$ و $P'(x_2)$ بطريقة هورنر

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 4 | 13 | 0 | -1 | 8 |
| -3.16277 | | -12.65108 | -1.10355 | 3.49027 | -7.87615 |
| | 4 | 0.34892 | -1.10355 | 2.49027 | 0.12385 $= P(-3.16277)$ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 4 | 0.34892 | -1.10355 | 2.49027 |
| -3.16277 | | -12.65108 | 38.90826 | -119.56962 |
| | 4 | -12.30216 | 37.80535 | -117.07935 |

$= P'(-3.16277)$

NOTE BOOK

$$x_3 = -3.16277 - \frac{0.12385}{-117.07935} = -3.16171$$

$$|x_3 - x_2| = 1.06 \times 10^{-3} < \varepsilon$$

وبالتالي الجذر المقبول هو $x_3 = -3.16277$

انتهت