كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل عددي1

المحاضرة : الثانية/نظري/

التحليل العددي * السنة الثانية * قسم الرياضيات

المحاضرة الثانية : حل المعادلات غير الخطية - نظري

تمهيد:

كل معادلة من الشكل $a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n=b$ ندعوها معادلة خطية وغير ذلك ندعوها معادلة غير خطية مثل $ax^2+bx+c=0$ حيث $a\neq 0$ هي معادلة من الدرجة الثانية.

يوجد الكثير من الحالات التي لا يمكن بها حل المعادلات غير الخطية بالطرق التحليلية المعروفة، لذلك نلجأ للطرق العددية للبحث عن جذور تقريبية للحل الدقيق بتفاوت مسموح به معطى ε.

تعريف: نقول أن العدد a جذر للمعادلة $f(x)=0$ إذا كان $f(a)=0$ سنرمز للحل التقريبي بالرمز $\bar{x}$ حيث $|f(\bar{x})|<\varepsilon$، سنقوم بدراسة مجموعة من الطرق العددية لإيجاد هذا الحل التقريبي بالاعتماد على تخمينات ابتدائية، لنبدأ بالطريقة الأولى:

طريقة تنصيف المجال Bisection Method:

ليكن f تابع مستمر على المجال $[a,b]$ ولنفترض أن $f(a).f(b)<0$ عندئذ توجد قيمة x_0 بحيث أن $a<x_0<b$ و $f(x_0)=0$

المطلوب إيجاد قيمة تقريبية لهذا الجذر، بتفاوت مسموح به ε، للتبسيط سنفترض وجود جذر وحيد في المجال $[a,b]$، تستدعي هذه الطريقة التنصيف المتكرر للمجالات الجزئية من المجال $[a,b]$ وكل خطوة نقوم بتعيين النصف الذي يحوي الجذر x_0، لتطبيقها نتبع الخوارزمية التالية:

- نفترض في البداية أن $a_1=a$ و $b_1=b$ ونضع $x_1=\frac{a_1+b_1}{2}=\frac{a+b}{2}$ (أول تخمين)
فإذا كان $f(x_1)=0$ فإن $\bar{x}=x_1$ أو $|f(x_1)|<\varepsilon$ وانتهى الحل، وإلا:
$f(x_1)\neq 0$ عندئذ تكون إشارة $f(x_1)$ إما من إشارة $f(a_1)$ أو من إشارة $f(b_1)$.
- إذا كانت إشارة $f(x_1)$ من إشارة $f(a_1)$ فإن $\bar{x}\in[x_1,b_1]$
وعندئذ نضع $a_2=x_1$ و $b_2=b_1$

Sudject
Year: Month: Date: NOTE BOOK

* إذا كانت إشارة $f(x_1)$ تعاكس إشارة $f(a_1)$ فإن $\bar{x} \in [a_1, x_1]$ عندئذ نضع $a_2 = a_1$ و $b_2 = x_1$

* نعيد تكرار الخطوات السابقة على المجال $[a_2, b_2]$ ونكرر حتى يتحقق المعيار $|f(x_n)| < \varepsilon$ وهو شرط توقف الحل.

خواص طريقة تنصيف المجال:

- التقارب لطريقة تنصيف المجال بطيء جداً ومعدل التقارب خطي
- طريقة تنصيف المجال لا تستطيع إيجاد الجذور العقدية لكثيرات الحدود
- إذا كان الجذر قريباً من إحدى أطراف المجال $[a, b]$ فإننا سنحتاج لعدد كبير من التكرارات للوصول إلى حل تقريبي مناسب.

مثال: استخدم طريقة تنصيف المجال لإيجاد جذر تقريبي للمعادلة $f(x) = 0$ حيث $f(x) = x^3 - 3x - 1$ و $\varepsilon = 0.05$ ،

الحل: أولاً نقوم بتحديد مجال ينتمي له الجذر المطلوب بالشكل:

$$f(2) = 1 > 0 \ , \ f(1) = -3 < 0 \ , \ f(0) = -1 < 0$$

بما أن: $f(1) \cdot f(2) < 0$ فإن جذر المعادلة ينتمي للمجال $[1, 2]$

$$x_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{1+2}{2} = 1.5 \Rightarrow f(1.5) = -2.125 \neq 0$$

$$|f(1.5)| > 0.05$$

$$f(1.5) \cdot f(2) < 0 \Rightarrow \bar{x} \in [1.5, 2]$$

$$x_2 = \frac{1.5+2}{2} = 1.75 \Rightarrow f(1.75) = -0.890625 \neq 0$$

$$|f(1.75)| > 0.05$$

$$f(1.75) \times f(2) < 0 \Rightarrow \bar{x} \in [1.75, 2]$$

Sudject
Year: Month: Date: NOTE BOOK

$x_3 = \frac{1.75+2}{2} = 1.875$, $f(1.875) = -0.035 \neq 0$

$|f(1.875)| = 0.035 < 0.05$

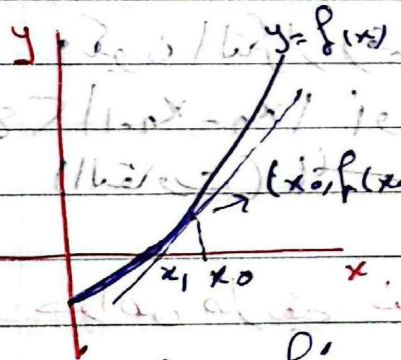
بالتالي الحل التقريبي المقبول هو $\bar{x} = 1.875$

طريقة نيوتن رافسون [Newton-Raphson Method]

تعتبر طريقة نيوتن رافسون إحدى أكثر الطرق العددية كفاءة في مسائل إيجاد الحلول التقريبية للجذور الحقيقية، تقتصر هذه الطريقة على افتراض أن التابع $f(x)$ ومشتقاته الأولى مستمرة في جوار ما للجذر $\bar{x}$ للمعادلة $f(x)=0$.

لنفرض أن x_0 تقريب ابتدائي للجذر x بشرط أن هذا الجذر مقبول أي أن $|x - x_0|$ صغير بشكل كاف.

إن مبدأ عمل هذه الطريقة يعتمد على إنشاء مماس لمنحني التابع f في النقطة $(x_0, f(x_0))$



بالتالي هذا المماس سيقطع محور الفواصل (ox) في نقطة ما فاصلتها x_1 أي في النقطة $(x_1, 0)$ فتكون x_1 أقرب للجذر $\bar{x}$ من x_0، ولتحديد قيمة x_1 نكتب معادلة المماس لمنحني التابع f في النقطة $(x_0, f(x_0))$ حيث ميله $m = f'(x_0)$ أي

$$\Delta: y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$(x_1, 0) \in \Delta \Rightarrow 0 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

ومنه

$$1.\quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Sudject

Year: Month: Date:

NOTE BOOK

- نكرر الخطوات السابقة بإنشاء مماس لمنحني التابع f من النقطة $(x_1, f(x_1))$ عندئذ سيقطع هذا المماس المحور (ox) في النقطة التي نأ صلتها x_2 وهي أقرب للجذر $\bar{x}$ من x_1، الآن نكتب معادلة المماس الذي ميله $m = f'(x_1)$ ويمر من النقطة $(x_2, 0)$

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

$$0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

ومنه:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

ونكرر هذه الخطوات بإنشاء المماسات المتتابعة لنحصل على متتالية من التقريبات للجذر $\bar{x}$ يعطى حدها العام بالصيغة:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad ; \quad n \geqslant 1$$

ويكون التكرار رقم n هو الجذر التقريبي المقبول إذا تحقق الشرط $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ أو الشرط $|f(x_n)| < \varepsilon$ حيث ε مقدار الخطأ (التفاوت) المسموح به.

خواص طريقة نيوتن رافسون:

1- طريقة نيوتن رافسون أسرع من طريقة تنصيف المجال للوصول إلى الجذر.

2- معدل التقارب تربيعي.

3- طريقة نيوتن رافسون لا تعتمد على إشارة الدالة $f(x)$

4- طريقة نيوتن رافسون تستطيع إيجاد الجذور العقدية لكثيرات الحدود.

Sudject

Year: Month: Date: NOTE BOOK

مثال: أوجد جذر تقريبي للمعادلة $f(x)=0$ مستخدماً طريقة نيوتن رافسون

حيث $f(x)=x^3-2x-30$ ، $\varepsilon=0.0005$

الحل: $f(0)=-30$ ، $f(1)=-31$ ، $f(2)=-26$ ، $f(3)=-9$

$f(4)=26$

بما أن $f(3)\cdot f(4)<0$ فإن جذر المعادلة $f(x)=0$ ينتمي

للمجال $[3,4]$

نضع القيمة الابتدائية $x_0=\frac{3+4}{2}=3.5$ ولدينا $f'(x)=3x^2-2$

$f(x_0)=(3.5)^3-2(3.5)-30=5.875$

$f'(x_0)=3(3.5)^2-2=34.75$

$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=3.33093$

$|x_1-x_0|=0.1690.7>\varepsilon$

$f(x_1)=(3.33093)^3-2(3.33093)-30=0.29512$

$f'(x_1)=3(3.33093)^2-2=31.28528$

$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_2)}=3.32149$ ، $|x_2-x_1|=0.00944>\varepsilon$

$f(x_2)=0.00068$ ، $f'(x_2)=31.09688$

$x_3=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}=3.32146$ ، $|x_3-x_2|=0.00003<\varepsilon$

فالحل التقريبي المقبول هو

$\bar{x}=3.3214$

Subject

Year: Month: Date:

NOTE BOOK

طريقة التقريبات المتتالية (طريقة النقطة الثابتة):

تعريف: نقول أن التابع $g(x)$ يملك نقطة ثابتة P إذا تحقق
$g(P) = P$

مثلاً النقطة $P = \frac{1}{2}$ نقطة ثابتة للتابع
$g(x) = 3x - 1$ لأن:
$g(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$

مبرهنة: إذا كان التابع $g(x)$ مستمراً على المجال $[a,b]$ وحقق:
$\forall x \in [a,b] , g(x) \in [a,b]$
فإن التابع عندئذ يملك نقطة ثابتة P في المجال $[a,b]$
إضافة لذلك إذا كان $|g'(x)| \leq K < 1$ من أجل كل $x \in [a,b]$
فالنقطة الثابتة عندئذ وحيدة.

خوارزمية الطريقة:

لكن $f(x)$ تابع مستمر على المجال $[a,b]$ ولنفرض أن المعادلة
$f(x) = 0$ جذراً حقيقياً في هذا المجال، تتلخص طريقة النقطة الثابتة
لإيجاد هذا الجذر بالخطوات الآتية:

1- إعادة ترتيب المعادلة $f(x) = 0$ بإبقاء متغير واحد x على الطرف الأيسر وتحويل كافة الحدود الأخرى للطرف الأيمن لنحصل على الصيغة: $x = g(x)$

2- نوجد $g'(x)$ المشتق الأول للتابع الجديد $g(x)$

3- نعوض x_0 التخمين الابتدائي للجذر في عبارة $g'(x)$

4- نختبر مدى دقة الصيغة $g(x)$ في الوصول للحل باختبار المعيار وفق ما يلي: $|g'(x_0)| < 1$

NOTE BOOK

Sudject

Year: Month: Date: NOTE BOOK

a - إذا تحقق المعيار فالصيغة $g(x)$ والتخمين الابتدائي x_0 توصل للحل الصحيح وعندئذ نستخدم الصيغة $x_n = g(x_{n-1})$ ، $n \geq 1$ التكرارية حتى يتحقق لدينا الشرط $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$.

b - إذا كان $|g'(x_0)| \geq 1$ فإن الصيغة $g(x)$ لا توصل للحل ويكون اختيارنا غير موفق ونعيد ترتيب المعادلة $f(x) = 0$ بطريقة مختلفة لاستنباط صيغة جديدة للتابع $g(x)$

مثال : باستخدام طريقة التقريبات المتتالية أوجد حل المعادلة $f(x) = 0$ حيث $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 10$ ، $\varepsilon = 0.005$

الحل : $f(2) = -8$, $f(1) = -10$, $f(0) = -10$ فإن $f(2) \cdot f(3) < 0$
$f(3) = 2$

فجذر المعادلة $f(x) = 0$ ينتمي للمجال $[2, 3]$ نضع تخمين ابتدائي

$$x_0 = \frac{a+b}{2} = \frac{2+3}{2} = 2.5$$

نختار صيغة أولى لـ $g(x)$

$$x^3 - 2x^2 + x - 10 = 0 \Rightarrow x = -x^3 + 2x^2 + 10$$

$$g_1(x) = -x^3 + 2x^2 + 10 \Rightarrow g_1(2.5) = 6.875 \notin [2, 3]$$

بالتالي الخيار غير موفق نختار صيغة أخرى لـ $g(x)$

$$x^3 - 2x^2 + x - 10 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}(x^3 + x - 10)$$

$$x = \sqrt{\frac{x^3 + x - 10}{2}} \Rightarrow g_2(x) = \sqrt{\frac{x^3 + x - 10}{2}}$$

$$g_2'(x) = \frac{\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}}{2 \times \sqrt{\frac{x^3 + x - 10}{2}}} \Rightarrow |g_2'(2.5)| = 2.45 > 1$$

بالتالي الخيار غير موفق

NOTE BOOK

Sudject

Year: Month: Date: NOTE BOOK

نختار صيغة جديدة لـ $g(x)$

$$x^3 = 2x^2 - x + 10$$

$$x = \sqrt[3]{2x^2 - x + 10}$$

$$\Rightarrow g_3(x) = (2x^2 - x + 10)^{\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow g_3'(x) = \frac{1}{3}(2x^2 - x + 10)^{-\frac{2}{3}}(4x - 1)$$

$$g_3'(2.5) = 0.4072 < 1$$

$$g_3(2.5) \in [2,3]$$

الجيد موفق ولنشئ الصيغة التكرارية :

$$x_n = g_3(x_{n-1}) \; ; \; n \geq 1$$

$$x_n = (2x_{n-1}^2 - x_{n-1} + 10)^{\frac{1}{3}}$$

$$x_0 = 2.5 \Rightarrow x_1 = g_3(x_0) = (2 \times (2.5)^2 - (2.5) + 10)^{\frac{1}{3}} = 2.71441$$

$$x_2 = g_3(x_1) = 2.80296$$

$$x_3 = g_3(x_2) = 2.84016$$

$$x_4 = 2.85588 \; ; \; x_5 = 2.86255 \; , \; x_6 = 2.86537$$

$|x_6 - x_5| = 0.003 < \varepsilon$ فالحل التقريبي المقبول هو $\bar{x} = x_6$

NOTE BOOK