كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : بنى جبرية2

المحاضرة : الرابعة/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

لتكن $(G,*)$ زمرة و H زمرة جزئية ناظمية في الزمرة G

تمّ تعريف علاقة التكافؤ على G.

$\forall a,b\in G:\ a \underset{H}{\sim} b \Leftrightarrow a*H=b*H \Leftrightarrow a^{-1}*b\in H$

عندئذٍ مجموعة صفوف التكافؤ هي

$$G/H=\{a*H;\ a\in G\}$$

نعرّف على G/H عملية بالشكل التالي:

$$(a*H)(b*H)=(a*b)*H$$

عندئذٍ G/H تشكل زمرة بالنسبة للعملية السابقة

والحيادي فيها هو H ونسمي G/H زمرة القسمة (عامل الزمرة)

ملاحظة:

إذا كانت G زمرة منتهية و H زمرة جزئية ناظمية

في G عندئذٍ: $O(G/H)=\dfrac{O(G)}{O(H)}$

ملاحظة: إذا كانت $(G,+)$ زمرة جمعية و H زمرة جزئية

ناظمية في G

$$G/H=\{a+H;\ a\in G\}$$

والعملية المعرفة:

$$(a+H)+(b+H)=(a+b)+H$$

$$a+b=b+H \Leftrightarrow a-b\in H.$$

ملاحظة:

مثال: لتكن لدينا الزمرة $G = U(32)$ و $H = U_{16}(32)$ زمرة جزئية ناظمية في G والمطلوب أوجد G/H

الحل:

$$G = U_{32} = \{x ; 1 \le x < 32 \ \& \ gcd(x, 32) = 1\}$$

$$= \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31\}$$

$$H = U_{16}(32) = \{x ; x \in U(32) \ \& \ 16 / (x-1)\} = \{1, 17\}$$

H زمرة جزئية ناظمية في G

$$G/H = \{a \otimes_{32} H ; a \in G\}$$

$1 \otimes_{32} H = H = \{1, 17\} = 17 \otimes_{32} H$

$3 \otimes_{32} H = \{3, 19\} = 19 \otimes_{32} H$

$5 \otimes_{32} H = \{5, 21\} = 21 \otimes_{32} H$

$7 \otimes_{32} H = \{7, 23\} = 23 \otimes_{32} H$

$9 \otimes_{32} H = \{9, 25\} = 25 \otimes_{32} H$

$11 \otimes_{32} H = \{11, 27\} = 27 \otimes_{32} H$

$13 \otimes_{32} H = \{13, 29\} = 29 \otimes_{32} H$

$15 \otimes_{32} H = \{15, 31\} = 31 \otimes_{32} H$

$G/H = \{H, 3 \otimes_{32} H, 5 \otimes_{32} H, 7 \otimes_{32} H, 9 \otimes_{32} H, 11 \otimes_{32} H, 13 \otimes_{32} H, 15 \otimes_{32} H\}$

* هومومورفيزمات الزمر:

تعريف: ليكن $(G,*)$ و (G,T) زمرتين:

$f : (G,*) \longrightarrow (G',T)$

يقال بأنه f هوموموفيزم زمر إذا حققت الشرط التالي

$\forall x,y \in G : f(x*y) = f(x)\, T\, f(y)$

تعريف:

ليكن $(G',T) \longrightarrow f : (G,*)$ هوموموفيزم زمر

يُقال بأنه:

1) f ايبوموفيزم إذا كان f غامر.

2) f مونوموفيزم إذا كان f متباين

3) f ايزوموفيزم إذا كان f تقابله

ملاحظة:

يُقال عن زمرتين G و G' أنهما ايزوموفيزميتان ونكتبه $G \cong G'$ إذا وجد بينهما ايزوموفيزم

مثال

IR مجموعة الاعداد الحقيقية و IR^+ مجموعة الاعداد الحقيقية الموجبة تماماً.

$f : (IR,+) \longrightarrow (IR^+,\cdot)$

$f(x) = 2^x$

اثبت أنه f ايزوموفيزم زمر

$\forall x, y \in \mathbb{R}$

$f(x+y) = 2^{x+y}$

$= 2^x \cdot 2^y = f(x) \cdot f(y)$.

بالتالي f هومومورفيزم زمر.

② $\forall y \in \mathbb{R}^+ : x = \frac{\ln y}{\ln 2} \in \mathbb{R}$

$f(x) = f\left(\frac{\ln y}{\ln 2}\right) = 2^{\frac{\ln y}{\ln 2}} = e^{\frac{\ln y}{\ln 2} \cdot \ln 2} = y$

f غامر.

③ $\ker f = \{x : x \in \mathbb{R} \ \& \ f(x) = 1 ; 2^x = 1\} = \{0\}$

f متباين.

نستنتج مما سبق أنه f تقابله وبالتالي f إيزومورفيزم زمر.

تعريف الحلقة:

قدّم الرياضي الألماني David Hilbert (1862-1943) مفهوم الحلقة في البنى الجبرية

الحلقة $(R, +, \cdot)$

المجموعة R المزودة بالعمليتين الثنائيتين $(+), (\cdot)$

$+ : R \times R \to R$

$+ (a, b) = a + b$

$\cdot : R \times R \to R$

$\cdot (a, b) = a \cdot b$

بحيث تحقق الشروط التالية:

① $(R, +)$ زمرة تبديلية

② $(\cdot)$ تجميعي على عناصر R.

③ الضرب توزيعي على $(+)$ من اليسار واليمين

$\forall (a,b,c) \in R : a.(b+c) = ab + ac$ (يسار)
$(b+c)a = ba + ca$ (يميني)

تعريف: يقال عن الحلقة بأنها تبديلية إذا تحقق الشرط التالي

*) $\forall a,b \in R : a.b = b.a$

**) يقال بأنه الحلقة $(R,+,.)$ واحدية إذا وجد في R عنصر حيادي بالنسبة لـ $(.)$ أي يوجد $e \in R$
$\forall a \in R : a.e = e.a = a$

* نرمز لحيادي الحلقة بالنسبة للجمع بـ O_R وتسمى صفر الحلقة.

*) نرمز لحيادي الحلقة بالنسبة لـ $(.)$ بـ 1_R وتسمى واحد الحلقة

مثال: $(\mathbb{Z},+,.)$ حلقة تبديلية واحدية $1_{\mathbb{Z}} = 1$ ، $O_{\mathbb{Z}} = 0$

مثال: حلقة الاعداد الصحيحة قياس n (حلقة بواقي القسمة على العدد n)

لتكن لدينا المجموعة:

$\mathbb{Z}_n = \{0,1,2,\ldots,n-1\}$

تم تزويدها بالعمليتين:

$\forall a,b \in \mathbb{Z}_n : a \oplus_n b = r$

حيث هو باقي قسمة $(a+b)$ على n.

* $\otimes_n$

$\forall a,b \in \mathbb{Z}_n : a \otimes_n b = r$

عندئذٍ: $(\mathbb{Z}_n, \oplus_n, \otimes_n)$ حلقة تبديلية.

مثال: لنعرف على مجموعة الأعداد الصحيحة العمليتان $*$ و T بالشكل التالي:

$\forall a,b \in \mathbb{Z} : a*b = a+b-1$

$aTb = a+b-ab$

والمطلوب: اثبت أنّ $(\mathbb{Z},*,T)$ حلقة تبديلية واحدية

الحل:

① $(\mathbb{Z},*)$ زمرة تبديلية؟

① $\mathbb{Z}$ مغلقة بالنسبة للعملية $*$:

$\forall a,b \in \mathbb{Z} : a*b = a+b-1 \in \mathbb{Z}$

محققة

② $*$ تجميعية على عناصر $\mathbb{Z}$ إذا تحقق الشرط:

$\forall a,b,c \in \mathbb{Z} : (a*b)*c = a*(b*c)$

$\ell_1 : (a*b)*c = (a+b-1)*c = a+b-1+c-1$

$= a+b+c-2$

$\ell_2 : a*(b*c) = a*(b+c-1) = a+b+c-1-1 =$

$a+b+c-2 \Rightarrow \ell_1 = \ell_2$

③ يوجد في $\mathbb{Z}$ عنصر حيادي بالنسبة للعملية $*$ هو $e=1$ لأنّ:

$e*a = 1*a = 1+a-1 = a$

$a*e = a*1 = a+1-1 = a$

④ يوجد لكل $a \in \mathbb{Z}$ معكوس بالنسبة للعملية $*$ هو $a' = 2-a$ لأنه:

$a'*a = (2-a)*a = 2-a+a-1 = 1 = e$

5) * تبديلية في $\mathbb{Z}$ إذا تحقق الشرط:

$\forall a,b \in \mathbb{Z} : a*b = b*a$

$\ell_1 = a*b = a+b-1$

$= b+a-1 = b*a = \ell_2$

ومما سبق نجد أنه $(\mathbb{Z},*)$ زمرة تبديلية.

2) .

T تجميعية على عناصر $\mathbb{Z}$

$\forall a,b,c \in \mathbb{Z} : (aTb)Tc = aT(bTc)$

$(aTb)Tc = (a+b-ab)Tc = a+b-ab+c-(a+b-ab)c$

$= a+b+c-ab-ac-bc+abc$

$\ell_2 = aT(bTc) = aT(b+c-bc)$

$= a+b+c-bc-a(b+c-bc) =$

$a+b+c-ab-ac-bc+abc \Rightarrow$

$\ell_1 = \ell_2$

$\Rightarrow$ T تجميعية على عناصر $\mathbb{Z}$

3) . T توزيعية من اليسار واليمين

$\forall a,b,c \in \mathbb{Z} : (a*b)Tc \overset{?}{=} (aTc)*(bTc)$

$\ell_1 = (a*b)Tc = (a+b-1)Tc = a+b-1+c-c(a+b-1)$

$= a+b+2c-ac-bc-1$

$\ell_2 = (aTc)*(bTc) = (a+c-ac)*(b+c-bc)$

$= a+c-ac+b+c-bc-1 = a+b+2c-ac-bc-1$

$= \ell_1 = \ell_2$

من اليسار $\forall a,b,c \in \mathbb{Z}$: $aT(b*c)$
$= (aTb)*(bTc)$
تبرهن بسهولة
بالتالي $(\mathbb{Z},*,T)$ حلقة
T تبديلية إذا تحقق الشرط:
$\forall a,b \in \mathbb{Z}: aTb = bTc$
$aTb = a+b-ab = b+a-ba = bTa$
ومنه T تبديلية بالتالي $(\mathbb{Z},*,T)$ حلقة تبديلية
ولنثبت أنها واحدية
يوجد $e=0$ هو: العنصر الحيادي في $\mathbb{Z}$ بالنسبة لـ T
لأنه:
$aTe = aT0 = a+0-0a = a$
$eTa = 0Ta = 0+a-0a = a$
تحقق الشرط بالتالي
$(\mathbb{Z},*,T)$ حلقة تبديلية، صفر الحلقة هو 1، واحد الحلقة هو (0).

مبرهنة:
لتكن $(R,+,\cdot)$ حلقة، $a,b,c \in R$ عندئذٍ
(1) $a0 = 0a = 0$
حيث 0 هو صفر الحلقة وهو الحيادي في R بالنسبة لـ $(+)$
(2) $a(-b) = (-a)b = -(ab)$
(3) $(-a)(-b) = a.b$ (4) $a(b-c) = ab-ac$
~~(5) $bc = ab$~~

⑤ $(b-c)a = ba - ca$ وإذا كانت R حلقة واحدية عندئذٍ $(-1)a = -a$ و $(-1)(-1) = 1$

وإذا كانت m و n أعداد صحيحة عندئذٍ

$(na)(mb) = (nm)(ab)$

$n(-a) = -(na)$

$n(ab) = (na)(b) = a(nb)$

تعريف: $(R, +, \cdot)$ حلقة

$0_R \neq a \in R$ حلقة

*) يقال عن العنصر a بأنه قاسم للصفر في R إذا تحقق الشرط

$\exists\, 0_R \neq b \in R : ab = ba = 0_R$

ملاحظة: الحلقة R التي لا تحوي قواسم للصفر نسميها حلقة تامة $a.b = 0_R$

تعريف: لتكن a حلقة واحدية يقال عن عنصر a بأنه قابل للقلب في R إذا تحقق الشرط التالي

$\exists\, 0_R \neq b \in R \Leftarrow ab = ba = 1_R$ ونكتب عندئذٍ

$a^{-1} = b$

مثال: العناصر القابلة للقلب في $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ هي $\{-1, 1\}$

مثال: أوجد العناصر القابلة للقلب والقاسمة للصفر في الحلقة: $(\mathbb{Z}_6, \oplus_6, \otimes_6)$ ؛ $\mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$\otimes_6$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

العناصر القاسمة للصفر $\{2,3,4\}$

العناصر القابلة للقلب $\{1,5\}$

نستنتج أنها حلقة غير تامة لاحتوائها قواسم الصفر.

انتهت المحاضرة