كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : بنى جبرية2

المحاضرة : الثالثة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

مجموعة قوى عنصر في زمرة:

لتكن $(G,*)$ زمرة ما، $x \in G$ المجموعة التالية

$\{x^n ; n \in \mathbb{Z}\}$ تسمى مجموعة قوى العنصر x ونرمز لها بـ $\langle x \rangle$

وهي تشكل زمرة جزئية في الزمرة $(G,*)$

ملاحظة: من أجل كل عنصر x من الزمرة $(G,*)$ نحصل على الزمرة $\langle x \rangle = \{x^n ; n \in \mathbb{Z}\}$ في G والمولدة بالعنصر x.

ملاحظة: كل زمرة مولدة من عنصر تسمى بزمرة دائرية (دوارة)، أي إذا كانت $(G,*)$ **زمرة** فإنها تكون دائرية إذا وفقط إذا وجد $x \in G$ بحيث $G = \langle x \rangle$

ملاحظة:

إذا كانت G زمرة دائرية عندئذٍ $G = \langle x \rangle = \langle x^{-1} \rangle$

س): كيف نبحث عن المولد لزمرة دائرية منتهية؟

الجواب: نأخذ عنصر كيفي في الزمرة غير ~~ال~~ الحيادي وليكن a ثم نحسب a^1, a^2, a^3 ...... فإذا حصلنا على جميع عناصر الزمرة عند وصولنا إلى الحيادي في G عندئذٍ يكون a مولد وخلاف ذلك يكون a ليس مولد للزمرة G

مثال:

أوجد مولد **للزمرة** $(U_{(10)}, \times_{10})$; $U_{(10)} = \{1,3,7,9\}$ الحيادي في $U_{(10)}$

هو 1

نأخذ $a=3$

$a^1 = 3^1 = 3 \neq 1$

$a^2 = 3^2 = 3 \otimes_{10} 3 = 9 \neq 1$

$a^3 = 3^3 = 3 \otimes_{10} 3 \otimes_{10} 3 = 7 \neq 1$

$a^4 = 3 \otimes_{10} 3 \otimes_{10} 3 \otimes_{10} 3 = 1 = 1.$

عندئذٍ $a=3$ مولّد أي $U(10) = \langle 3 \rangle$

س2:

إذا كانت لدينا الزمرة $(G,*)$ الدائرية المنتهية وكانت a مولّد لـ G عندئذٍ للحصول على المولّدات الأخرى لـ G نشكّل المجموعة

$$\{a^k ;\ 1 \leq k < n \ \& \ \gcd(k,n) = 1\}$$

(حيث $n = o(G) = |G|$ رتبة الزمرة G) والتي تعبّر عن جميع المولّدات للزمرة G.

مثال:

مجموعة الأعداد العقدية $G = \{1, -1, i, -i\}$ زمرة جزئية في C بالنسبة لضرب الأعداد العقدية والمطلوب:

أوجد جميع مولّدات الزمرة G

الحل:

* نأخذ $a=-1$

$a^1 = (-1)^1 = -1 \neq 1$

$a^2 = (-1)^2 = 1$

نستنتج أنه $a=-1$ ليس مولّد للزمرة G

* نأخذ $a = i$

$a^1 = i \neq 1$

$a^2 = -1 \neq 1$

$a^3 = -i \neq 1$

$a^4 = 1$

* المولّدات الأخرى

$= \{(i)^k ; 1 \leq k < 4 , \gcd(k,4) = 1\} = \{i^1 , i^3\} = \{i , -i\}$

مثال:

لتكن لدينا الزمرة $(\mathbb{Z}_8 , \oplus_8)$ والمطلوب: اوجد جميع مولّداتها

الحل:

الزمرة $\mathbb{Z}_8$ جميعة والحيادي فيها هو الصفر.

$\mathbb{Z}_8 = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$

نبحث عن مولّد للزمرة $\mathbb{Z}_8$

نأخذ $a = 1$ ثم نحسب na

$1a = 1 \neq 0$

$2a = 1 \oplus_8 1 = 2 \neq 0$

$3a = 1 \oplus_8 1 \oplus_8 1 = 3 \neq 0$

$4a = 1 \oplus_8 1 \oplus_8 1 \oplus_8 1 = 4 \neq 0$

$5a = 1 \oplus_8 1 \oplus_8 1 \oplus_8 1 \oplus_8 1 = 5 \neq 0$

$6a = 1 \oplus_8 1 \oplus_8 1 \oplus_8 1 \oplus_8 1 \oplus_8 1 = 6 \neq 0$

$7a = 1 \oplus_8 1 \oplus_8 1 \oplus_8 1 \oplus_8 1 \oplus_8 1 \oplus_8 1 = 7 \neq 0$

$8a = 1 \oplus_8 1 \oplus_8 1 \oplus_8 1 \oplus_8 1 \oplus_8 1 \oplus_8 1 \oplus_8 1 = 8$

$8a = 0$

حصلنا على جميع عناصر الزمرة $\mathbb{Z}_8$ عند وصولنا إلى الحيادي $a=0$ بالتالي الـ 1 مولّد للزمرة $\mathbb{Z}_8$.

المولّدات الأخرى لـ $\mathbb{Z}_8$

$\{K : 1 \le K \le 8 ، gcd(K,8)=1\} = \{1,3,5,7\}$.

ملاحظة: الزمرة $(\mathbb{Z}_n, \oplus_n)$ زمرة دائرية منتهية مولّدة بالعدد 1.

ملاحظة: كلّ زمرة دائرية هي زمرة تبديلية.

تذكرة:

المرافقات اليسارية واليمينية لزمرة جزئية H في الزمرة G

* نسمّي المجموعة

$a*H = \{a*h ; h \in H\}$

مرافقة يسارية للزمرة الجزئية ~~...~~ في الزمرة G.

* نسمّي ~~المجموعة~~ المجموعة $H*a = \{h*a ; h \in H\}$

مرافقة يمينية للزمرة الجزئية H في الزمرة G.

ملاحظة:

لتكن $(G,*)$ زمرة ما، H زمرة جزئية في G عندئذٍ

1. $(|H| = |a*H|)\ o(H) = o(a*H)$
2. $a*H = b*H \Leftrightarrow a^{-1}*b \in H$.
3. $a \in a*H$.

4) $a*H = H \iff a \in H$

5) أي مرافقتين يساريتين لـ H في G ، $a*H$ ، $b*H$ تحققان $a*H = b*H$ or $a*H \cap b*H = \phi$

6) المرافقات اليسارية تشكل تجزئة للزمرة G.

ملاحظة:

إذا كانت $(G,+)$ زمرة جمعية و H زمرة جزئية في G عندئذ $a+H = b+H \iff a-b \in H$

علماً أن:

$$a+H = \{a+h ; h \in H\} \quad , \quad H+a = \{h+a ; h \in H\}$$

مثال: لتكن $H = \{0,3,6\}$ زمرة جزئية في الزمرة $(\mathbb{Z}_9, \oplus_9)$ والمطلوب: اوجد المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية H في الزمرة $(\mathbb{Z}_9, \oplus_9)$

الحل:

$$\mathbb{Z}_9 = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

زمرة جمعية:

$$0 \oplus_9 H = \{0,3,6\} = 3 \oplus_9 H$$
$$1 \oplus_9 H = \{1,4,7\} = 4 \oplus_9 H$$
$$2 \oplus_9 H = \{2,5,8\} = 5 \oplus_9 H$$

بالتالي المرافقات هي:

$$\{H, 1 \oplus_9 H, 2 \oplus_9 H\}$$

مثال: اوجد المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية $H=\{1,11\}$

في الزمرة $(U(30),\otimes_{30})$.

$U(30)=\{x:\ 1\le x<30,\ \gcd(x,30)=1\}$

$=\{1,7,11,13,17,19,23,29\}$.

$1\otimes_{30}H=\{1,11\}=11\otimes_{30}H$.

$7\otimes_{30}H=\{7,17\}=17\otimes_{30}H$.

$13\otimes_{30}H=\{13,23\}=13\otimes_{30}H$.

$19\otimes_{30}H=\{19,29\}=29\otimes_{30}H$

بالتالي المرافقات اليسارية هي:

$\{1\otimes_{30}H,\ 7\otimes_{30}H,\ 13\otimes_{30}H,\ 19\otimes_{30}H\}$.

مبرهنة لاغرانج: (1770):

لتكن G زمرة منتهية و H زمرة جزئية منه

عندئذٍ رتبة الزمرة الجزئية H في G تقسم رتبة G

أي $o(H)/o(G)$

الزمرة الجزئية الناظمية:

تعريف: لتكن $(G,\cdot)$ زمرة و H زمرة جزئية في G يقال بأنه H زمرة جزئية ناظمية في G إذا تحقق الشرط التالي: $aH=Ha\ \ \forall a\in G$.

ملاحظة: الزمرة الجزئية H ناظمية في G إذا تحقق الشرط: $xHx^{-1}\subseteq H\ \ \forall x\in G$.

ملاحظة:

H زمرة جزئية ناظمية و G إذا وفقط إذا كانت $xhx^{-1}\in H\ \ \forall x\in G \,\&\, h\in H$.

مثال: أثبت أنَّ الزمرة الجزئية:

$SL(2,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} ; a,b,c,d \in \mathbb{R} \ \& \ det(A) = ad - bc = 1 \right\}$

ناظمية في الزمرة $GL(2,\mathbb{R})$ و

$GL(2,\mathbb{R}) = \left\{ B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} ; x,y,z,w \in \mathbb{R} \ \& \ det(B) = xw - zy \neq 0 \right\}$

الحل:

~~ليكن $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$~~

ليكن $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$ بالتالي $det(A) = 1$

وليكن $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in GL(2,\mathbb{R})$

$det(B) = xw - zy$

نتحقق من الشرط:

$xhx^{-1} \in H$

$$BAB^{-1} = \frac{1}{xw - yz} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w & -y \\ -z & x \end{bmatrix}$$

يكون الناتج بعد الضرب هو مصفوفة من المرتبة 2 وعناصرها أعداد حقيقية

$det(BAB^{-1}) = det B \times det A \times det B^{-1}$

$= det B \, det B^{-1} \, det A = 1$

$\Rightarrow BAB^{-1} \in SL(2,\mathbb{R})$

$B \in GL(2,\mathbb{R})$ & $A \in SL(2,\mathbb{R})$

نستنتج مما سبق أنه $SL(2,\mathbb{R})$ ناظمية في الزمرة $GL(2,\mathbb{R})$

ملاحظة: كل زمرة جزئية H في زمرة G التبديلية تكون H ناظمية في G

انتهت المحاضرة