كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل رياضي4

المحاضرة : الثانية/**عملي**/

التمرين الأول: ليكن التطبيق d:

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

المعرف بالشكل:

$$d(x,y) = \max_{1 \le i \le n} |y_i - x_i|$$

اثبت أنه $(\mathbb{R}^n, d)$ فضاء متري.

الحل:

① من تعريف d نجد أنه $d(x,y) \ge 0$

$$d(x,y) = 0 \iff \max_{1 \le i \le n} |y_i - x_i| = 0$$

$$\iff |y_i - x_i| = 0 \; ; \; i = 1, \dots, n$$

$$\iff y_i - x_i = 0 \; ; \; i = 1, \dots, n \iff y_i = x_i \; ; \; i = 1, \dots, n$$

والشرط الأول محقق

② خاصة التناظر:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : d(x,y) \stackrel{?}{=} d(y,x)$$

$$d(x,y) = \max_{1 \le i \le n} |y_i - x_i| = \max_{1 \le i \le n} |(-1)(x_i - y_i)|$$

$$= \max_{1 \le i \le n} |-1| \cdot |x_i - y_i| = \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i| = d(y,x)$$

والشرط الثاني محقق

$\forall x, y, z \in R^n$ ③

$d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$

$d(x,z) = \max_{1\le i\le n} |z_i - x_i| = \max_{1\le i\le n} |z_i - y_i + y_i - x_i|$

$|a+b| \le |a| + |b| \le \underbrace{\max_{1\le i\le n} |z_i - y_i|}_{d(y,z)} + \underbrace{\max_{1\le i\le n} |y_i - x_i|}_{d(x,y)}$

$\le d(y,z) + d(x,y)$

$\le d(x,y) + d(y,z)$

ومنه الشرط الثالث محقق.

من تحقق الشروط الثلاث السابقة نجد أن d تابع

و R^n (R^n, d) فضاء متري.

التمرين الثاني:

ليكن التطبيق d

$d : C[a,b]$

$d : C[a,b] \times C[a,b] \to R^+ \cup \{0\}$

معرّف بالشكل:

$d(f,g) = \max_{a\le t\le b} |g(t) - f(t)|$

أثبت أن $(C[a,b], d)$ فضاء متري

① من تعريف d $\quad d(f,g) \ge 0$

$d(f,g) = 0 \Leftrightarrow \max_{a\le t\le b} |g(t) - f(t)| = 0.$

$\Leftrightarrow g(t) - f(t) = 0 \; ; t \in [a,b]$

$g(t) = f(t) \; ; t \in [a,b] \Leftrightarrow g = f.$

والشرط الاول محقق.

(2) $\forall f, g \in C[a,b] \quad d(f,g) \overset{?}{=} d(g,f)$

$$d(f,g) = \max_{a \le t \le b} |g(t) - f(t)|$$

$$= \max_{a \le t \le b} |(-1)(f(t) - g(t))|$$

$$= \max_{a \le t \le b} |-1| \cdot |f(t) - g(t)| = \max_{a \le t \le b} |f(t) - g(t)|$$

$$= d(g,f).$$

والشرط الثاني محقق.

(3)

متراجحة المثلث:

$\forall f, g, h \in C[a,b]$

$d(f,h) \le d(f,g) + d(g,h)$

$$d(f,h) \le \max_{a \le t \le b} |h(t) - f(t)|$$

$$= \max_{a \le t \le b} |h(t) - g(t) + g(t) - f(t)| \quad |a+b| \le |a| + |b|$$

$$\le \max_{a \le t \le b} |h(t) - g(t)| + \max_{a \le t \le b} |g(t) - f(t)|$$

$$\le d(g,h) + d(f,g) \le d(f,g) + d(g,h)$$

والشرط الثالث محقق

ومنه تحقق الشروط الثلاثة السابقة يتحقق المطلوب

التمرين الثالث: بفرض أن $x_1, x_2, \dots, x_n$ عناصر اختيارية من فضاء متري (M,d) اثبت أن

$$d(x_1, x_n) \le d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \dots + d(x_{n-1}, x_n)$$

الحل:

من الفرض الفضاء (M,d) فضاء متري d تابع مسافة ويحقق متراجحة المثلث من أجل x_1, x_n

$$d(x_1, x_n) \le d(x_1, x_2) + d(x_2, x_n)$$

من أجل x_2, x_n

$$d(x_2, x_n) \le d(x_2, x_3) + d(x_3, x_n)$$

من أجل x_3, x_n

$$d(x_3, x_n) \le d(x_3, x_4) + d(x_4, x_n)$$

$\vdots$

من أجل x_n, x_{n-2}

$$d(x_{n-2}, x_n) \le d(x_{n-2}, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_n)$$

بالجمع:

$$d(x_1, x_n) \le d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + d(x_3, x_4) + \dots + d(x_{n-2}, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_n)$$

وهو المطلوب.

انتهت المحاضرة