كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : جبر خطي2

المحاضرة : الثانية/**عملي**/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

السؤال الأول :

حل جملة المعادلات :

$$\begin{cases} x+2y=0 \\ 2x-y=0 \\ x+y=0 \end{cases}$$

$$H=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$R_2-2R_1 \longrightarrow R_2$$

$$R_3-R_1 \longrightarrow R_3$$

$$H\sim\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$-\frac{1}{5}R_2 \longrightarrow R_2$$

$$H\sim\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$R_2+R_3 \longrightarrow R_3$$

$$H \sim \left[\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$r = n = 2$

الجملة لها حل وحيد

① $x + 2y = 0$

② $y = 0$

نعوض ② في ① نجد

$\boxed{x = 0}$

ومنه حل الجملة هو الحل الصفري

$$\underbrace{S = \{(0,0)\}}$$

السؤال الثاني

حل الجملة

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$H = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$R_2 - 2R_1 \longrightarrow R_2$

$R_3 - 3R_1 \longrightarrow R_3$

$$H \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right]$$

$$-R_2 \longrightarrow R_2$$

$$H \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & +5 & 0 \end{array}\right]$$

$$R_2 + R_3 \longrightarrow R_3$$

$$H \sim \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$r = 2 < n = 3$$

الجملة لها عدد غير منته من الحلول لـ

$n - r = 1$ مجهول اختياري

① $x + y - 2z = 0$

② $y - 5z = 0$

من ②

$$\boxed{y = 5z}$$

نعوض في ①

$$\boxed{x = -3z}$$

$$S = \{(-3z, 5z, z), z \in \mathbb{R}\}$$

* حل جملة معادلات خطية باستخدام مقلوب مصفوفة:

لتكن الجملة

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$$

حيث

$$i = 1, 2, \ldots, n$$

ذات n مجهول و n معادلة

أن الجملة تكافئ المعادلة المصفوفية

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = B$$

حيث A مصفوفة الأمثال و

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ملاحظة:

المصفوفة A مصفوفة الأمثال

$A \in M_n(F)$ مصفوفة مربعة من المرتبة n فإذا كان

$\det(A) \neq 0$ فإن A قابلة للقلب ويكون مقلوبها A^{-1} موجود

وبالتالي يمكن أن نضرب طرفي المعادلة المصفوفية المكافئة

للجملة الأصلية بـ A^{-1} من اليسار أي:

$$\underbrace{A^{-1}.A}\,X = A^{-1}.B$$

$$I_n . X = A^{-1} . B$$

حيث

$$I_n \in M_n(F)$$

مصفوفة واحدية وعليه يكون لجملة المعادلات الخطية حل

هو

$$X = A^{-1}.B$$

سؤال:

حل الجملة

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 2x + 5y + 3z = 3 \\ x + 8z = 17 \end{cases}$$

الحل:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ و } B = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

فإنّ A قابلة للقلب

$$D_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 40$$

$$D_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = -13$$

$$D_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -5$$

$$D_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 16$$

$$D_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 5$$

$$D_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$D_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -9$$

$$D_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

$$D_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1$$

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 40 & -16 & -9 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A)$$

$$= \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to x \\ \to y \\ \to z \end{matrix}$$

$$S = \{(1, -1, 2)\}$$

مراجعات عامة:

* المصفوفة

ذي القياس $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

مصفوفة مربعة لها محدد $m = n$

نحصل عليه بإحدى الطريقتين:

1- النشر حسب الأسطر أو الأعمدة

2- طريقة ساروس

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} \end{array}\right)$$

$$A = (-1)^{1+1} a_{11} A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} A_{12} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} A_{1n}$$

محدد مصفوفة المتممات الجبرية

بالنشر وفق السطر

$$(-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij}$$

مقلوب A هو A^{-1} يحقق:

$$A \cdot A^{-1} = I_n$$

إيجاد مقلوب

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \times T$$

حيث $\Delta \times T$ هو متحول مصفوفة المتممات الجبرية

$$[A : I_n]$$

$$[I_n : A^{-1}]$$

حل المعادلات الخطية:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

يوجد ثلاث حالات:

1- مستحيلة الحل

2- الحل الوحيد

3- عدد لانهائي من الحلول.

* لدينا ثلاث طرق أساسية لحل الجملة:

1- غاوس:

$$A \cdot X = B$$

مصفوفة الأمثال — مصفوفة المتغيرات — مصفوفة الثوابت

$A' = [A : B]$ المصفوفة الموسعة

* إذا كان لدينا نظامان من المعادلات الخطية متكافئين فإن لهما مجموعة الحلول نفسها.

مثال:

حل جملة المعادلات الآتية:

$$2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 11$$

$$3x_1 - x_2 + 5x_3 = 10$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 7$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 5 & 11 \\ 3 & -1 & 5 & 10 \\ 1 & -1 & 2 & 7 \end{array}\right)$$

$$\frac{1}{2}R_1 \rightarrow R_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{11}{2} \\ 3 & -1 & 5 & 10 \\ 1 & -1 & 2 & 7 \end{array}\right)$$

$$-3R_1 + R_2 \longrightarrow R_2$$

$$-1R_1 + R_3 \longrightarrow R_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{13}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

$$\frac{2}{7} R_2 \longrightarrow R_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & -\frac{13}{7} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

$$-\frac{1}{2} R_2 + R_3 \longrightarrow R_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & -\frac{13}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{17}{7} \end{array}\right)$$

$$-7R_3 \longrightarrow R_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & -\frac{13}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -17 \end{array}\right)$$

نجد جملة المعادلات المكافئة للمصفوفة المدرجة

$$x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{5}{2}x_3 = \frac{11}{2}$$

$$x_2 - \frac{5}{7}x_3 = -\frac{13}{7}$$

$$\boxed{x_3 = -17}$$

$$\boxed{x_2 = \frac{5}{7}(-17) - \frac{13}{7}}$$

$$\boxed{x_1 = -\frac{3}{2}\left(\frac{5}{7}(-17) - \frac{13}{7}\right) + \frac{5}{2}(-17) + \frac{11}{7}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & \lambda m \end{array}\right]$$

$$0 x_n = \lambda m \,,\ \lambda m \neq 0$$

عديمة الحل.

ملاحظة:

ليكن لدينا نظام من المعادلات الخطية:

$A \cdot X = B$

$r(A') = q$

وليكن $r(A) = p$ رتبة مصفوفة

(1) $p < q$

(رتبة المصفوفة للأمثال أصغر من رتبة المصفوفة الموسعة)

تكون الجملة مستحيلة الحل.

2) عندما تكون رتبة المصفوفة الموسعة تساوي رتبة مصفوفة الأمثال وتساوي n

$$P = q = n$$

حيث n عدد المجاهيل

في هذه الحالة الحل وحيد

3) $P = q < n$

للجملة عدد لانهائي من الحلول.