



كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الاولى

المادة : جبر خطي 2

المحاضرة : الثانية / نظري /
+ الاولى عملي

{{ مكتبة A to Z }}

مكتبة A to Z : Facebook Group

كلية العلوم

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

2026

5

القسم: الرياضيات

السنة: الأولى

المادة: جبر خطي 2-

الماضرة: الثانية نظري + الأولى عمل

تعريف:

ليكن $(a_{ij}) \in M_{m \times n}(F)$ مصفوفة مربعة على حقل F من الرتبة $m \times n$ ، إن التحويلات التالية على المصفوفة (a_{ij}) :

1- البادلة بين سطرين مختلفين $R_i \rightarrow R_j$

2- ضرب سطر بعنصر لا يساوي الصفر من الحقل F إلى سطر آخر

$R_i \rightarrow \lambda R_i$ و $\lambda \in F$ و $\lambda \neq 0$

3- جمع حاصل ضرب سطر بعنصر مضارب للصفر من الحقل F إلى سطر آخر

$R_i \rightarrow R_i + \lambda R_j$ و $\lambda \in F$ و $\lambda \neq 0$

تسمى تحويلات سطرية أولية على المصفوفة (a_{ij})

تعريف:

نقول عن المصفوفتين $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij}) \in M_{m \times n}(F)$ المربعتين على الحقل

F ومن الرتبة $m \times n$ أنها متكافئتان

إذا كان بالإمكان استنتاج إحداها من الأخرى بمجموعة من

التحويلات السطرية الأولية عليها ونرمز لهذا التكافؤ بالرمز

تعريف:

ليكن $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(F)$ مصفوفة مربعة على حقل F نقول عن

المصفوفة A إنها مدرجة إذا وفقط إذا تحققت الشروط الآتية:

1- العنصر الأول غير الصفري في كل سطر غير صفري هو الواحد ويصل عنصريه

2- العنصر الأول غير الصفري في كل سطر غير صفري يقع على يسار العنصر الرابع

في الطر الذي سبقه

3- الأطر غير الصفرية نسبة الأطر الصفرية

مثال:

المصفوفتان الآتيتان مربعتان

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال:

المصفوفتان الآتيتان غير مربعة:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تعريف:

ليكن F حقل ما نسب كل معادلة من الشكل

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

معادلة خطية متجانسة a_1, a_2, \dots, a_n, b حيث الثوابت x_1, x_2, \dots, x_n هي عناصر من الحقل F ونقول أنها معادلة خطية معرفة على الحقل F ويمكن أن يكتب بالشكل المختصر:

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i = b$$

أمثلة:

$$\text{غير خطية} \Leftrightarrow x^2 + 2y - z + 1 = 0$$

$$\text{غير خطية} \Leftrightarrow \sqrt{x} - y + 2\frac{1}{z} = 0$$

$$\mathbb{R} \text{ خطية معرفة على } \Leftrightarrow \sqrt{2}x - y + \sqrt{3}z = -\frac{1}{2}$$

$$\mathbb{R} \text{ خطية معرفة على } \Leftrightarrow x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0$$



تعريف:

نقول عن مجموعة المعادلات

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

⋮

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

المؤلفة من m معادلة خطية ذات n متحول، بأنها مجموعة معادلات خطية معرفة على الشكل

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i$$

حيث $i = 1, 2, 3, \dots, m$

تعريف:

الشكل المصفوفي لمجموعة المعادلات الخطية:

ليكن لدينا مجموعة المعادلات الخطية

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i$$

حيث $i = 1, 2, 3, \dots, m$

$$A X = B$$

فإن الشكل المصفوفي لمجموعة المعادلات الخطية:

حيث A مصفوفة الأعداد:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

و X مصفوفة المتحولات (الجهائل)

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$



و B مصفوفة الكرد الـ ثابتة:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

تعريف الحالة المتجانسة:

هي حالة معادلات فطية الكرد الـ ثابتة في كل منها معررر أي أن مصفوفة الكرد الـ ثابتة

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ وتمثلها المصفوفى } A \cdot X = 0 \text{ ومصفوفتها الموسعة}$$

$$H = [A; 0]$$

تعريف الحالة غير المتجانسة:

هي حالة المعادلات الكظيفة ومصفوفة الكرد الـ ثابتة فيها ليست معزرة أي $B \neq 0$

$$\text{تمثلها المصفوفى } A \cdot X = B \text{ ومصفوفتها الموسعة}$$

$$H = [A; B]$$

تعريف رتبة مصفوفة:

تعرف رتبة المصفوفة $A = (a_{ij})$ بأنها تساوى عدد الأسطر غير المعزرة في المصفوفة

المربعة المكافئة للمصفوفة A وتسمى بالرتب $\text{rank}(A)$

* حلول حالة معادلات فطية بالاعتماد على معررر رتبة مصفوفة:

1- إذا كانت $\sum_{j=1}^n x_j z_{ij} = 0$ و $i = 1, 2, \dots, m$ حالة معادلات فطية

فبانة معرفة على مقل F ذات m معادلة و n مجهول \times فإن للحالة حل ومعده هو

الحل المعزري إذا كانت رتبة مصفوفة الأمثال A تساوى عدد المجهول n أي $(r=n)$.

* للجملة عدد لا نهائي من الحلول إذا كانت رتبة مصفوفة الأمثال أصغر من عدد الجاهل n أي : $(r < n)$ وفي هذه الحالة يكون للجملة $n-r$ مجهول اختياري

إذا كانت $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i$ حيث $i = 1, 2, \dots, m$

جملة معادلات خطية غير متجانسة معرفة على الجهل ذات n معادلة و n مجهول فإن :

* للجملة حل وحيد إذا كانت رتبة مصفوفة الموصية لا تساوي عدد الجاهل أي $(r = r' = n)$

* للجملة عدد لا نهائي من الحلول إذا كانت عدد الجاهل n أكبر من رتبة مصفوفة الأمثال والتي تساوي رتبة المصفوفة الموصية أي $(r = r' < n)$ وفي هذه الحالة يكون عدد الجاهل الاختياري $n-r$

الطريقة
① حل جملة المعادلات :

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - y = 5 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$$

$$H = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 5 \end{array} \right] \quad \text{الكل :}$$

$$R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2$$

$$R_3 - 3R_1 \rightarrow R_3$$

$$H \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -5 & 10 \end{array} \right] - \frac{1}{5}R_2 \rightarrow R_2$$



$$H \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & -5 & -1 & -10 \end{array} \right]$$

$$R_3 + 5R_2 \rightarrow R_3$$

$$H \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \end{array} \right] - \frac{1}{5}R_3 \rightarrow R_3$$

$$H \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} \end{array} \right]$$

بلا صفائف $r=2$ (رتبة الأمثل)

$r=3$ (رتبة المصفوفة المربعة) أي $r \neq r'$ وبالتالي الكلمة مستقلة لكل $S = \phi$

بعضها جزء من بعض x و y يعني

$$\begin{array}{l} x + 2y = 5 \\ y = 1 \\ 0 \neq 1 \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

من (3) غير حقيقة مرتبة مستقلة لكل

(2) حل جملة المعادلات:

$$x + 2y - z = -1$$

$$-2x - 4y + 2z = 2$$

$$H = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & -4 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

$$R_2 + 2R_1 \rightarrow R_2$$

$$H \sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

الجمالي
 $n=3$

$r=1$ رتبة الأمثل (عدد الأعمدة غير صفرية في رتبة الأمثل)

$r'=0$ رتبة المصفوفة المربعة (عدد الصفوف غير صفرية)

$$(r = r' = 3)$$

بالتالي الجملتان غير متتامتين من الحلول

$$n - r = 3 - 1 = 2$$

$$x + 2y - z = -1 \quad \text{مجموع اختياري}$$

$$\Rightarrow x = -2y + z - 1$$

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = -2y + z - 1 \}$$

$$S = \{ (-2y + z - 1, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R} \}$$

(3) de la matrice :

$$\begin{cases} -3x - 5y + 36z = 10 \\ -x + 7z = 5 \\ x + y - 10z = -4 \end{cases}$$

$$H = \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & -5 & 36 & 10 \\ -1 & 0 & 7 & 5 \\ 1 & 1 & -10 & -4 \end{array} \right] \quad R_1 \rightarrow R_3$$

$$H \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -10 & -4 \\ -1 & 0 & 7 & 5 \\ -3 & -5 & 36 & 10 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} R_1 + R_2 \rightarrow R_2 \\ R_3 + 3R_1 \rightarrow R_3 \end{array}$$

$$H \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -10 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 6 & -2 \end{array} \right] \quad R_3 + 2R_2 \rightarrow R_3$$

$$H \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -10 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$r = r' = 2 < n = 3$$

الجملتان غير متتامتين من الحلول $n - r = 1$ مجموع اختياري



$$\textcircled{1} \quad x + y - 10z = -4$$

$$y - 3z = 1$$

من $\textcircled{2}$

$$y = 3z + 1$$

نعوض في $\textcircled{1}$

$$x = 7z - 5$$

مجموعة الحلول

$$S = \{ (7z - 5, 3z + 1, z) \mid z \in \mathbb{R} \}$$

حل أنظمة الأعداد $\textcircled{4}$

$$x + y = 2$$

$$2x - y = 7$$

$$H = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 7 \end{array} \right]$$

$$R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2$$

$$H \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \end{array} \right]$$

$$-\frac{1}{3}R_2 \rightarrow R_2$$

$$H \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

$$r = r' = n = 2$$

لحل أنظمة الأعداد $\textcircled{4}$

$$S = \{ (3, -1) \}$$

$\textcircled{1}$ حل وحيد $\textcircled{2}$ $\textcircled{3}$ $\textcircled{4}$ $\textcircled{5}$ $\textcircled{6}$ $\textcircled{7}$ $\textcircled{8}$ $\textcircled{9}$ $\textcircled{10}$ $\textcircled{11}$ $\textcircled{12}$ $\textcircled{13}$ $\textcircled{14}$ $\textcircled{15}$ $\textcircled{16}$ $\textcircled{17}$ $\textcircled{18}$ $\textcircled{19}$ $\textcircled{20}$



مكتبة
A to Z