كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : تحليل متجهات

المحاضرة : الرابعة /نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

تعريف:

الصف C^m هو صف التوابع المستمرة والاشتقاقية من مرتبة m والمشتقات مستمرة أيضاً.

المنحني الأملس:

نقول أنّ $\vec{x} = \vec{x}(t)$ أملس أو معطى بشكل نظامي إذا حقق:

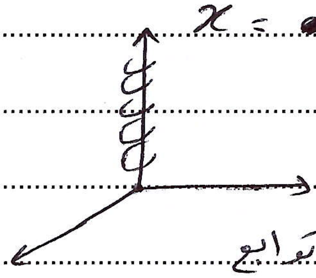
1- $\vec{x}(t) \in C^1$

2- $\vec{x}'(t) \neq 0$

مثال:

$$x = \cos(t)\vec{e_1} + \sin(t)\vec{e_2} + bt\vec{e_3}$$

يمثل هذا التابع الشعاعي منحني اللولب



نلاحظ أنّ $\vec{x}(t)$ اشتقاقي لأنّه مساقطه توابع اشتقاقية

$$\vec{x}'(t) = -\sin(t)\vec{e_1} + \cos(t)\vec{e_2} + b\vec{e_3}$$

$$\Leftarrow \vec{x}'(t) \neq 0$$

$$\vec{x}(t) \in C^1$$

و $\vec{x}'$ مستمر لذلك تحقق الشرطين فهو معطى بالشكل النظامي

تعريف :

نقول عن $\tau = \tau(\theta)$ أنهُ تغيير للوسيط مسموح به إذا كان $\tau \in C^1$

و $\frac{d\tau}{d\theta} \neq 0$

وإذا لاحظنا $\tau = \tau(\theta)$ تغيير مسموح به فإنهُ تقابل وله تقابل عكسي

$\theta = \theta(\tau)$

أيضاً تغيير مسموح به.

مثال :

$$d : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - 4\lambda \\ z = 6\lambda \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{x}(\lambda) = (1 + 2\lambda)\vec{e_1} + (2 - 4\lambda)\vec{e_2} + 6\lambda\vec{e_3}$$

إذا كتبنا معادلات وسيطية :

$$d' : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3t \end{cases} \quad ; \quad t = 2\lambda$$

$$\Rightarrow$$

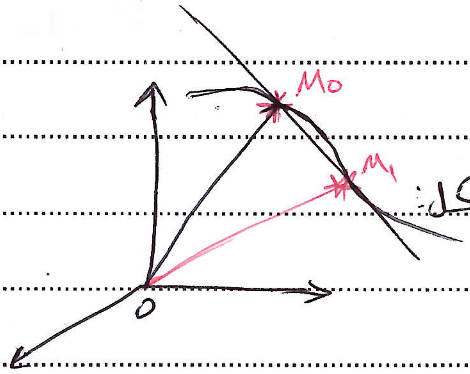
$$\vec{x}^*(t) = (1 + t)\vec{e_1} + (2 - 2t)\vec{e_2} + 3t\vec{e_3}$$

نلاحظ بوضع $t = 2\lambda$

$$\vec{x}^*(t) = \vec{x}^*(2\lambda) = \vec{x}(\lambda)$$

أي $\vec{x}^*$ و $\vec{x}$ متكافئان وهنا يوجد صف تكافؤ يعبر عن نفس المنحني الفراغي.

الشعاع المشتق:



بفرض لدينا $\vec{x} = \vec{x}(t)$

تابع شعاعي يعبر عن منحني كما في الشكل

بفرض عندما

$t = t_0$ يكون

$$\vec{x}(t_0) = \vec{OM_0}$$

وفي t نحصل على M بحيث

$$\vec{x}(t) = \vec{OM}$$

$\Leftarrow$

نرسم $\vec{x}(t) - \vec{x}(t_0) = \vec{M_0M}$

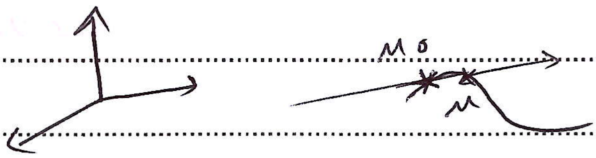
$\Leftarrow$

$$\frac{\vec{x}(t) - \vec{x}(t_0)}{t - t_0}$$

نحصل على حامل $\vec{M_0M}$ عندما $t \to t_0$ تقترب M من M_0

ويصبح المقدار

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\vec{x}(t) - \vec{x}(t_0)}{t \to t_0} = \vec{x}'(t_0)$$



عبارة عن مماس لـ C في OM

يعطى شعاع واحدة المماس

$$\boxed{\vec{T} = \frac{\vec{x}'(t)}{|\vec{x}'(t)|}}$$

الفاصلة المنحنية:

يعطى طول قوس من c محدود بـ t_0 و t بالعلاقة:

$$S = \int_{t_0}^{t} |\vec{x}'_{(t)}|\, dt$$

إذا عبرنا عن كل متحول s بنقطة على s ينتج لدينا تمثيل يدعى التمثيل الطبيعي

$$\vec{x} = \vec{x}_{(s)}$$

ما يميز التمثيل الطبيعي

$$\frac{d\vec{x}}{ds} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}$$

$$= \frac{d\vec{x}}{dt} \Big/ \frac{ds}{dt}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{d\vec{x}}{dt}\right| = \frac{|\vec{x}'(t)|}{|\vec{x}'(t)|} = 1$$

وهنا $\vec{x}'_{(s)} = \frac{d\vec{x}}{ds}$

و

$$\vec{T} = \vec{x}'_{(s)}$$

ملاحظة:

$$S = S_{(t)}$$

تغير مع t بحيث $S_{(t)}$ اشتقاقي و

$$\frac{ds}{dt} = |\vec{x}'_{(t)}| \neq 0$$

حيث $\vec{x}_{(t)}$ تمثيل نظامي.

ملاحظة:

يعطى طول القوس عندما $y = f(x)$ بالعلاقة:

$$S = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1+y'^2} \, dx$$

بعض أنواع المنحنيات:

1- المنحني البسيط:

نقول عن c الذي يمثله بالعلاقة $\vec{x} = \vec{x}(t)$

أنه منحني بسيط إذا كان مستمر ولا يحوي نقط مضاعفة

أي إذا كان $t_1 = t_2 \Longleftarrow \vec{x}(t_1) = \vec{x}(t_2)$

2- المنحني الأملس:

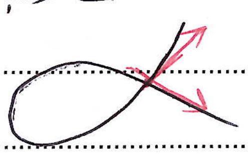
نقول أن c المعطى بالتمثيل

$\vec{x} = \vec{x}(t)$ أنه أملس إذا كان يملك مماس وحيد

في كل نقطة منه $\vec{x}' \neq 0$

ملاحظة:

في النقط المضاعفة نلاحظ وجود مماسين



الدوال السلمية ذات عدة متحولات:

تعطى بالعلاقة

$$Z = f(x,y)$$

تمثل سطحاً في الفراغ أي أنه $f(x,y) - Z = 0$

أحياناً نرمز لها بالشكل :

$$f(x, y, z) = 0$$

* نعرف المشتق الجزئي :

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

هو اشتقاق للدالة f مع اعتبار y و z ثوابت

وهنا سؤال؟

ماذا يمثل الشعاع

$$\vec{v} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

الجواب : يمثل شعاع الناظم للسطح

مثال :

$$f = e^{x^2 y} + x y^3$$

أوجد المشتقات الجزئية

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy\, e^{x^2 y} + y^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 e^{x^2 y} + 3xy^2$$

ملاحظة :

تفاضل f يعطى بالعلاقة :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

ملاحظة:

يعطى المشتق الكلي بالنسبة لـ x بالعلاقة

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

حيث $\boxed{\frac{dy}{dx} = y'}$