كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : تحليل متجهات

المحاضرة : الثالثة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

مبادئ في الهندسة التفاضلية:

المتابع الشعاعي:

هو عبارة عن تابع f حيث

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

يعطى كما يلي:

$$\vec{f}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

يمثل في الفراغ $\mathbb{R}^3$ منحني فراغي

* هناك توابع شعاعية تحقق:

$$\vec{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

حيث تعطى بالعلاقة:

$$\vec{f}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

يمثل في الفراغ $\mathbb{R}^3$ سطحاً.

أما التوابع التي تعطى

$$\vec{f} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

هي تطبيقات تغير معالم الفراغ.

حيث $\vec{f}(x,y,z) = (x', y', z')$

تسمى f في هذه الحالة حقل متجه

*** مجموعة تعريف دالة شعاعية:**

هي تقاطع مجموعات تعريف مساقطها

(مجموعة تضمن كل المساقط موجودة وبلحظة واحدة)

مثال ①:

$$\vec{v} = x\vec{i} + \frac{1}{x}\vec{j} + \frac{1}{e^{x-1}}\vec{K}$$

الحل:

هو عبارة عن دالة شعاعية

$$\vec{v} : \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

مجموعة التعريف

$$D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

مثال ②:

$$\vec{v} = x\ln y\,\vec{i} + \ln x\,\vec{j} + (x^2 - y^2)\vec{K}$$

الحل:

معرف على منطقة من $\mathbb{R}^2$ هي $x > 0$, $y > 0$

$$\Rightarrow D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;;\; x > 0 \wedge y > 0\}$$

أي مجموعة التعريف هي نقط من الربع الأول دون المحاور

راسم الخطي :

بفرض لدينا تابع شعاعي ما

$\vec{v}_{(t)} = (x_{(t)}, y_{(t)}, z_{(t)})$

عندما $t = t_0 \Leftarrow$

$\vec{v}_{(t_0)} = (x_{(t_0)}, y_{(t_0)}, z_{(t_0)})$

يمكن تمثيل $\vec{v}_{(t_0)}$ بشعاع بدايته o

$\Leftarrow$

$M_0 = (x_{(t_0)}, y_{(t_0)}, z_{(t_0)})$

بنفس الأسلوب عند تغير t يصبح لدينا نقط

$M(x_{(t)}, y_{(t)}, z_{(t)})$

$\Leftarrow$ نرسم منحني يمثل راسم الخطي

مثال :

أوجد راسم الخطي للتابع الشعاعي :

$\vec{r}_{(t)} = (t^2 - 2t , t+1)$

$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x = t^2 - 2t \\ y = t + 1 \quad \Rightarrow \end{cases}$$

حساب t

$$t = y - 1$$

$$x = (y-1)^2 - 2(y-1)$$

تمثل معادلة قطع مكافئ.

مثال:

أوجد رسم الخطي للتابع

$$\vec{f}(u,v) = (a\cos u \cos v,\ a\cos u \sin v,\ a\sin u)$$

الحل:

$$x = a\cos u \cos v$$
$$y = a\cos u \sin v$$
$$z = a\sin u$$

$$x^2 + y^2 = a^2 \cdot \cos^2 u \cos^2 v + a^2 \cdot \cos^2 u \sin^2 v$$
$$= a^2 \cdot \cos^2 u \,(\sin^2 v + \cos^2 v)$$
$$= a^2 \cdot \cos^2 u$$

$\Longrightarrow$

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \cdot \cos^2 u + a^2 \cdot \sin^2 u$$
$$= a^2$$

$\Leftarrow$ تمثل كرة مركزها المبدأ $O(0,0,0)$ ونصف قطرها $|a|$

النهايات:

نهاية تابع شعاعي عندما $t \to t_0$

هي نهاية مساقطه عندما $t \to t_0$

أي بفرض

$$v_{(t)} = (x_{(t)}, y_{(t)}, z_{(t)})$$

$$\lim_{t \to t_0} \vec{v}_{(t)} = \left(\lim_{t \to t_0} x_{(t)}, \lim_{t \to t_0} y_{(t)}, \lim_{t \to t_0} z_{(t)} \right)$$

الاستمرار:

استمرار المساقط لتابع شعاعي يعطي استمرار التابع الشعاعي.

الاشتقاق:

بما أن التوابع الشعاعية مساقطها توابع حقيقية تؤول دراسة الاشتقاق إلى دراسة المساقط

ملاحظة:

$$(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)' = \vec{v}_1' + \vec{v}_2'$$

$$(\vec{v}_1 . \vec{v}_2)' = \vec{v}_1' . \vec{v}_2 + \vec{v}_1 . \vec{v}_2'$$

$$(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2)' = \vec{v}_1' \wedge \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2'$$

مبرهنة:

التابع الشعاعي الذي طويلته ثابتة مشتقه يعامده
بينما التابع الشعاعي الذي لا يغير لا المنحني ولا الطول ولا الجهة
فإن مشتقه معدوم .

البرهان: نفرض $\vec{a}$ تابع شعاعي طوله ثابت ⇐

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

باشتقاق الطرفين:

$$\vec{a}' \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{a}' = 0$$

$$2\, \vec{a} \cdot \vec{a}' = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a}' = 0$$

⇐ $\vec{a} \perp \vec{a}'$