كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : تحليل رياضي2

المحاضرة : الثانية/**عملي**/

المحاضرة الثانية
(عملي)

السؤال الأول: استخدم طريقة تغيير المتحول في إيجاد التكاملات التالية

$$I_1 = \int sin\left(\frac{1}{2}x+3\right)dx, \qquad I_2 = \int \frac{dx}{1-4x^2}, \qquad I_3 = \int \frac{dx}{(xlnx)ln(lnx)}$$

$$I_4 = \int \sqrt[3]{x}\, sin\left(\sqrt[3]{x^4}\right)dx$$

الحل:

- $I_1 = \int sin\left(\frac{1}{2}x+3\right)dx$

نضع $t = \frac{1}{2}x + 3$ بالتالي $dt = \frac{1}{2}dx$

$$I_1 = \int sin\left(\frac{1}{2}x+3\right)dx = \int 2sint\, dt = -2cost + c = -2cos\left(\frac{1}{2}x+3\right) + c$$

- $I_2 = \int \frac{dx}{1-4x^2}$

نكتب I_2 بالشكل

$$I_2 = \int \frac{dx}{1-(2x)^2}$$

نفرض $u = 2x$ بالتالي $du = 2dx$ عندئذ

$$I_2 = \int \frac{dx}{1-(2x)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + c$$
$$= \frac{1}{4}ln\left|\frac{1+2x}{1-2x}\right| + c$$

- $I_3 = \int \frac{dx}{(xlnx)ln(lnx)}$

نفرض $t = ln(lnx)$ بالتالي $dt = \frac{1}{xlnx}dx$ عندئذ

$$I_3 = \int \frac{dt}{t} = ln|t| + c = ln|ln(lnx)| + c$$

- $I_4 = \int \sqrt[3]{x}\, sin(\sqrt[3]{x^4})dx$

نفرض $t = \sqrt[3]{x^4} = x^{\frac{4}{3}}$ بالتالي $dt = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}dx$ عندئذ

$$I_4 = \int \frac{3}{4}sint\, dt = -\frac{3}{4}cost + c = -\frac{3}{4}cos\left(\sqrt[3]{x^4}\right) + c$$

السؤال الثاني: أنجز التكاملات التالية

$$I_1 = \int (x+1)arctanx\, dx, \qquad I_2 = \int (x^2+2x+3)e^x\, dx,$$

$$I_3 = \int e^{-x}sin2xdx\ , I_4 = \int arctan(x)dx$$

الحلّ:

❖ $\boldsymbol{I_1 = \int (x+1)arctanx\, dx}$

نكامل بالتجزئة:

$$u = arctan(x),\ \ du = \frac{dx}{x^2+1}$$
$$dv = (x+1)dx,\ \ v = \frac{x^2}{2} + x$$

بالتالي:

$$\begin{aligned} I_1 &= \left(\frac{x^2}{2}+x\right)arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+2x)}{x^2+1}dx \\ &= \left(\frac{x^2}{2}+x\right)arctan(x) - \frac{1}{2}\int \left(\frac{x^2+1-1}{x^2+1} + \frac{2x}{x^2+1}\right)dx \\ &= \left(\frac{x^2}{2}+x\right)arctan(x) - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{x^2+1} + \frac{2x}{x^2+1}\right)dx \\ &= \left(\frac{x^2}{2}+x\right)arctan(x) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}arctanx - \frac{1}{2}ln(x^2+1) + c \end{aligned}$$

❖ $\boldsymbol{I_2 = \int (x^2+2x+3)e^x\, dx}$

نضع

$$u = x^2+2x+3,\ \ du = (2x+2)dx$$
$$dv = e^x dx,\ \ v = e^x$$

بالتالي:

$$I_2 = (x^2+x+3)e^x - \int (2x+2)\, e^x dx$$

لنضع $J = \int (2x+2)\, e^x dx$ بالتالي نكامل بالتجزئة

نضع

$$u = 2x+2,\ \ du = 2dx$$
$$dv = e^x dx,\ \ v = e^x$$

بالتالي:

$$J = (2x+2)e^x - \int 2\, e^x dx = (2x+2)e^x - 2e^x + c_1$$
$$I_2 = (x^2+x+3)e^x - (2x+2)e^x + 2e^x + c$$

❖ $\boldsymbol{I_3 = \int e^{-x} sin2xdx}$

الحل: نفرض

$$u = e^{-x},\ \ du = -e^{-x}dx$$
$$dv = sin2xdx,\ \ v = -\frac{1}{2}cos2x$$
$$I_3 = -\frac{1}{2}e^{-x}cos2x - \frac{1}{2}\underbrace{\int e^{-x}\cos 2x\, dx}_{J}$$

النكامل J ينجز بالتجزئة: نفرض

$$u = e^{-x},\ \ du = -e^{-x}dx$$
$$dv = \cos 2x\, dx,\ \ v = \frac{1}{2}sin2x$$
$$J = \frac{1}{2}e^{-x}sin2x + \frac{1}{2}\int e^{-x}sin2x\, dx = \frac{1}{2}e^{-x}sin2x + \frac{1}{2}I_3$$

نعوض في عبارة I_3 :

$$I_3 = -\frac{1}{2}e^{-x}cos2x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{-x}sin2x + \frac{1}{2}I_3\right)$$

$$I_3 = -\frac{1}{2}e^{-x}cos2x - \frac{1}{4}e^{-x}sin2x - \frac{1}{4}I_3$$

بالتالي:

$$\frac{5}{4}I_3 = e^{-x}\left(-\frac{1}{2}cos2x - \frac{1}{4}sin2x\right)$$
$$I_3 = -\frac{4}{5}e^{-x}\left(\frac{1}{2}cos2x + \frac{1}{4}sin2x\right) + c$$

❖ $\boldsymbol{I_4 = \int arctan(x)dx}$

نضع

$$u = arctan(x), \ \ du = \frac{dx}{x^2+1}$$
$$dv = dx, \ \ v = x$$

بالتالي:

$$I_4 = xarctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{xdx}{x^2+1}$$
$$I = xarctan(x) - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + c$$

السؤال الثالث: أنجز التكاملات التالية

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{36-3x^2}}, \qquad I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}, \qquad I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$$
$$I_4 = \int \frac{dx}{2+9x^2}, \qquad I_5 = \int \frac{dx}{4-9x^2}$$

الحلّ:

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{36-3x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{6^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 x^2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}arcsin\left(\frac{\sqrt{3}x}{6}\right) + c \ \ or \ -\frac{1}{\sqrt{3}}arccos\left(\frac{\sqrt{3}x}{6}\right) + c$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} = ln\left(x + \sqrt{x^2+4}\right) + c$$

$$I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}} = ln\left|x + \sqrt{x^2-4}\right| + c$$

$$I_4 = \int \frac{dx}{2+9x^2} = \int \frac{dx}{\left(\sqrt{2}\right)^2 + (3)^2x^2} = \frac{1}{3\sqrt{2}}arctan\left(\frac{3x}{\sqrt{2}}\right) + c$$

$$I_5 = \int \frac{dx}{4-9x^2} = \int \frac{dx}{(2)^2 - (3)^2x^2} = \frac{1}{2\times 2\times 3}ln\left|\frac{2+3x}{2-3x}\right| + c = \frac{1}{12}ln\left|\frac{2+3x}{2-3x}\right| + c$$