



كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الاولى

المادة : تحليل رياضي 2

المحاضرة : الرابعة / نظري /

{{ مكتبة A to Z }}

مكتبة A to Z Facebook Group :

كلية العلوم

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

2026

5



## المحاضرة الرابعة (نظري)

المحتوى العلمي للمحاضرة يتضمن مايلي:

- دراسة التكامل من النمط  $I_m = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^m}$
- دراسة التكامل من النمط  $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$
- دراسة التكامل من النمط  $\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c} dx$
- دراسة التكامل من النمط  $\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^m}$
- دراسة التكامل من النمط  $\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^m} dx$
- العديد من الأمثلة المتعلقة بهذه الأنماط من التكاملات.

**دراسة التكامل من النمط  $I_m = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^m}$  حيث  $m \geq 1$  عدد طبيعي**

الحالة الأولى:  $m = 1$  بالتالي

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

الحالة الثانية:  $m \geq 2$  بالتالي

$$I_m = I_{n+1} = \frac{1}{2a^2n} \left[ \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + (2n - 1)I_n \right]; n \geq 1$$

يدعى هذا القانون بالدستور التدريجي

**مثال 1:** أنجز التكامل

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2)^2}$$

الحل: لنضع

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2 + 2)^2}$$

نلاحظ بأن  $a^2 = 2$  نجد

$$I_2 = I_{1+1} = \frac{1}{2 \times 2 \times 1} \left[ \frac{x}{(x^2 + 2)^1} + (2 \times 1 - 1)I_1 \right]$$

$$I_2 = \frac{1}{4} \left[ \frac{x}{x^2 + 2} + I_1 \right]$$

لنوجد  $I_1$ :

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c_1$$

نعوض بشكل تراجمي نجد

$$I_2 = \frac{x}{4(x^2 + 2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c$$

**مثال 2:** أنجز التكامل

$$I_3 = \int \frac{dx}{(x^2 + 4)^3}$$

الحل: نلاحظ بأن  $a^2 = 4$  نجد

$$I_3 = I_{2+1} = \frac{1}{2 \times 4 \times 2} \left[ \frac{x}{(x^2 + 4)^2} + (2 \times 2 - 1)I_2 \right]$$

$$I_3 = \frac{x}{16(x^2 + 4)^2} + \frac{3}{16}I_2$$

لنوجد  $I_2$ :

$$I_2 = I_{1+1} = \frac{1}{2 \times 4 \times 1} \left[ \frac{x}{(x^2 + 4)^1} + (2 \times 1 - 1)I_1 \right]$$

$$I_2 = \frac{x}{8(x^2 + 4)} + \frac{1}{8}I_1$$

لنوجد  $I_1$ :

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + 4} = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + c_1$$

نعوض بشكل تراجمي نجد

$$I_2 = \frac{x}{8(x^2 + 4)} + \frac{1}{16} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{8}c_1$$

عندئذ

$$I_3 = \frac{x}{16(x^2+4)^2} + \frac{3}{16} \left( \frac{x}{8(x^2+4)} + \frac{1}{16} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{8} c_1 \right)$$

$$I_3 = \frac{x}{16(x^2+4)^2} + \frac{3x}{128(x^2+4)} + \frac{3}{256} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

$$I = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \quad \text{دراسة التكامل من النمط}$$

لدراسة هذا التكامل نميز الحالات التالية بالاعتماد على مميز ثلاثي الحدود  $ax^2 + bx + c$  عندئذ ثلاثي الحدود  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ : الحالة الأولى: جذران مختلفان هما  $\alpha$  و  $\beta$  حيث

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \beta = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

عندئذ

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

$$I = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{(x - \alpha)(x - \beta)}$$

نحلل الكسر  $\frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}$  إلى مجموع كسرين بالشكل:

$$\frac{1}{(x - \alpha)(x - \beta)} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - \beta}$$

$$I = \frac{1}{a} \int \left( \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - \beta} \right) dx = \frac{A}{a} \ln|x - \alpha| + \frac{B}{a} \ln|x - \beta| + c$$

الحالة الثانية:  $\Delta = 0$  عندئذ ثلاثي الحدود  $ax^2 + bx + c$  جذر مضاعف هو  $\alpha = \frac{-b}{2a}$

عندئذ

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2$$

$$I = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{(x - \alpha)^2} = -\frac{1}{a} \times \frac{1}{(x - \alpha)} + c$$

الحالة الثالثة:  $\Delta < 0$  عندئذ ثلاثي الحدود  $ax^2 + bx + c$  لا يملك جذور حقيقية عندئذ نتمم إلى مربع كامل نجد

$$ax^2 + bx + c = a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right)$$

$$= a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) = a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right)$$

نضع  $r^2 = -\frac{\Delta}{4a^2}$  بالتالي

$$ax^2 + bx + c = a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + r^2 \right)$$

$$I = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + r^2} = \frac{1}{ra} \arctan\left( \frac{x + \frac{b}{2a}}{r} \right) + c$$

$$I = \frac{1}{ra} \arctan\left( \frac{2ax + b}{2ar} \right) + c$$

مثال 3: أنجز التكامل

$$I = \int \frac{dx}{2x^2 + 9x - 5}$$

الحل: نلاحظ بأن  $a = 2, b = 9, c = -5$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 121 > 0$$

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1}{2}, \beta = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -5$$

عندئذ

$$2x^2 + 9x - 5 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 5)$$

$$I = \int \frac{dx}{2x^2 + 9x - 5} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 5)}$$

نحلل الكسر  $\frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 5)}$  إلى مجموع كسرين بالشكل:

$$\frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 5)} = \frac{A}{x - \frac{1}{2}} + \frac{B}{x + 5} \dots (*)$$

▪ إيجاد A: نضرب (\*) بـ  $\left(x - \frac{1}{2}\right)$  ثم نعوض في العلاقة الناتجة  $x = \frac{1}{2}$  بالتالي نجد

$$A = \frac{2}{11}$$

▪ إيجاد B: نضرب (\*) بـ  $(x + 5)$  ثم نعوض في العلاقة الناتجة  $x = -5$  بالتالي نجد

$$B = -\frac{2}{11}$$

$$I = \frac{1}{2} \int \left( \frac{\frac{2}{11}}{x - \frac{1}{2}} - \frac{\frac{2}{11}}{x + 5} \right) dx = \frac{1}{11} \ln \left| x - \frac{1}{2} \right| - \frac{1}{11} \ln |x + 5| + c = \frac{1}{11} \ln \left| \frac{x - \frac{1}{2}}{x + 5} \right| + c$$

مثال 4: أنجز التكامل

$$I = \int \frac{dx}{x^2 - 6x + 9}$$

الحل: نلاحظ بأن  $a = 1, b = -6, c = 9$ 

$$\Delta = 0$$

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = 3$$

عندئذ

$$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$$

$$I = \int \frac{dx}{x^2 - 6x + 9} = \int \frac{dx}{(x - 3)^2} = -\frac{1}{(x - 3)} + c$$

مثال 5: أنجز التكامل

$$I = \int \frac{dx}{2x^2 - 12x + 27}$$

الحل: نلاحظ بأن  $a = 2, b = -12, c = 27$ 

$$\Delta = -72 < 0$$

$$2x^2 - 12x + 27 = 2\left(x^2 - 6x + \frac{27}{2}\right) = 2\left(x^2 - 6x + 9 - 9 + \frac{27}{2}\right) = 2\left((x - 3)^2 + \frac{9}{2}\right)$$

$$I = \int \frac{dx}{2x^2 - 12x + 27} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x - 3)^2 + \frac{9}{2}}$$

$$I = \int \frac{dx}{2x^2 - 12x + 27} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x - 3)^2 + \frac{9}{2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x - 3)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{3} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}(x - 3)}{3}\right) + c = \frac{1}{3\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}(x - 3)}{3}\right) + c$$

## دراسة التكامل من النمط $I = \int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c} dx$

لدراسة التكامل من النمط  $I = \int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c} dx$  نكتبه بالشكل:

$$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c} dx = \int \frac{A(2ax+b)}{ax^2+bx+c} dx + \int \frac{B}{ax^2+bx+c} dx$$

حيث  $A$  و  $B$  ثوابت يُطلب تعيينها

نشتق الطرفين ثم نضرب بـ  $ax^2 + bx + c$  نجد

$$Mx + N = A(2ax + b) + B$$

بالمطابقه نحصل على الثابتين  $A$  و  $B$  بالتالي

$$I = A \ln|ax^2 + bx + c| + BI_1$$

حيث  $I_1 = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$  وهذا التكامل تم مناقشته سابقاً

مثال 6: أنجز التكامل

$$I = \int \frac{2x+1}{x^2-3x+2} dx$$

الحل: نكتب  $I$  بالشكل:

$$\int \frac{2x+1}{x^2-3x+2} dx = \int \frac{A(2x-3)}{x^2-3x+2} dx + \int \frac{B}{x^2-3x+2} dx$$

نشتق الطرفين ثم نضرب بـ  $x^2 - 3x + 2$  نجد

$$2x + 1 = A(2x - 3) + B$$

بالمطابقه نجد  $A = 1$  و  $B = 4$  بالتالي

$$I = \ln|x^2 - 3x + 2| + I_1$$

حيث

$$I_1 = \int \frac{4dx}{x^2-3x+2}$$

لنوجد  $I_1$

لنحلل الكسر التالي

$$\frac{4}{x^2-3x+2} = \frac{4}{(x-2)(x-1)}$$

إلى مجموع كسريين بالشكل:

$$\frac{4}{(x-2)(x-1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} \dots (*)$$

▪ إيجاد  $A$ : نضرب (\*) بـ  $(x-2)$  ثم نعوض في العلاقة الناتجه  $x = 2$  بالتالي نجد

$$A = 4$$

▪ إيجاد  $B$ : نضرب (\*) بـ  $(x-1)$  ثم نعوض في العلاقة الناتجه  $x = 1$  بالتالي نجد

$$B = -4$$

$$I_1 = 4 \ln|x-2| - 4 \ln|x-1| + c_1 = 4 \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| + c_1$$

بالتالي

$$I = \ln|x^2 - 3x + 2| + 4 \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| + c$$

$$I = \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^m} \text{ دراسة التكامل من النمط}$$

لدراسة هذا التكامل نميز الحالات التالية بالاعتماد على مميز ثلاثي الحدود  $ax^2 + bx + c$   $\Delta = b^2 - 4ac > 0$  عندئذٍ ثلاثي الحدود  $ax^2 + bx + c$  جذران مختلفان هما  $\alpha$  و  $\beta$  حيث

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \beta = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

عندئذٍ

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

$$I = \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^m} = \frac{1}{a^m} \int \frac{dx}{(x - \alpha)^m (x - \beta)^m}$$

نحلل الكسر  $\frac{1}{(x-\alpha)^m(x-\beta)^m}$  إلى مجموع كسور جزئية بالشكل:

$$\frac{1}{(x - \alpha)^m (x - \beta)^m} = \frac{A_1}{(x - \alpha)^m} + \frac{A_2}{(x - \alpha)^{m-1}} + \dots + \frac{A_m}{(x - \alpha)} + \frac{B_1}{(x - \beta)^m} + \frac{B_2}{(x - \beta)^{m-1}} + \dots + \frac{B_m}{(x - \beta)}$$

بالتالي التكامل  $I$  يحسب بسهولة

**الحالة الثانية:**  $\Delta = 0$  عندئذٍ ثلاثي الحدود  $ax^2 + bx + c$  جذر مضاعف هو  $\alpha = \frac{-b}{2a}$

عندئذٍ

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2$$

$$I = \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^m} = \frac{1}{a^m} \int \frac{dx}{(x - \alpha)^{2m}} = \frac{1}{a^m} \times \frac{(x - \alpha)^{-2m+1}}{-2m+1} + c$$

**الحالة الثالثة:**  $\Delta < 0$  عندئذٍ ثلاثي الحدود  $ax^2 + bx + c$  لا يملك جذور حقيقية عندئذٍ ننتم إلى مربع كامل نجد

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) = a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right) \end{aligned}$$

نضع  $r^2 = -\frac{\Delta}{4a^2}$  بالتالي

$$ax^2 + bx + c = a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + r^2 \right)$$

$$I = \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^m} = \frac{1}{a^m} \int \frac{dx}{\left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + r^2 \right)^m}$$

ثم نستخدم الدستور التدريجي فنحصل على  $I$

**مثال 7:** أنجز التكامل

$$I = \int \frac{dx}{(x^2 - x - 2)^2}$$

الحل: ثلاثي الحدود  $x^2 - x - 2$  جذران مختلفان هما  $\alpha$  و  $\beta$  حيث  $\alpha = 2$  ,  $\beta = -1$  عندئذ

$$I = \int \frac{dx}{(x^2 - x - 2)^2} = \int \frac{dx}{(x+1)^2(x-2)^2}$$

نحلل الكسر  $\frac{1}{(x+1)^2(x-2)^2}$  إلى مجموع كسور جزئية بالشكل:

$$\frac{1}{(x+1)^2(x-2)^2} = \frac{A_1}{(x+1)^2} + \frac{A_2}{(x+1)} + \frac{B_1}{(x-2)^2} + \frac{B_2}{(x-2)} \dots (*)$$

$A_1$ : نضرب طرفي العلاقة (\*) بـ  $(x+1)^2$  ثم نعوض في العلاقة الناتجة بـ  $x = -1$  نجد

$$A_1 = \frac{1}{9}$$

$B_1$ : نضرب طرفي العلاقة (\*) بـ  $(x-2)^2$  ثم نعوض في العلاقة الناتجة بـ  $x = 2$  نجد

$$B_1 = \frac{1}{9}$$

▪ نضرب طرفي العلاقة (\*) بـ  $x$  ونجعل  $x \rightarrow +\infty$  نجد

$$A_2 + B_2 = 0 \dots (1)$$

▪ نعوض في طرفي العلاقة (\*)  $x = 0$  نجد

$$\frac{1}{4} = A_1 + A_2 + \frac{1}{4}B_1 - \frac{1}{2}B_2$$

بالتالي

$$A_2 - \frac{1}{2}B_2 = \frac{1}{9} \dots (2)$$

نحل (1) و (2) حلاً مشتركاً نجد  $A_2 = \frac{2}{27}$  و  $B_2 = -\frac{2}{27}$

$$I = \int \frac{dx}{(x^2 - x - 2)^2} = \frac{1}{9} \int \frac{dx}{(x+1)^2} + \frac{2}{27} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{9} \int \frac{dx}{(x-2)^2} - \frac{2}{27} \int \frac{dx}{x-2}$$

$$I = -\frac{1}{9(x+1)} + \frac{2}{27} \ln|x+1| - \frac{1}{9(x-2)} - \frac{2}{27} \ln|x-2| + c$$

مثال 8: أنجز التكامل التالي

$$I = \int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 1)^4}$$

الحل: ثلاثي الحدود  $x^2 + 2x + 1$  يملك جذر مضاعف هو  $\alpha = \frac{-b}{2a} = -1$  عندئذ

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

$$I = \int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 1)^4} = \int \frac{dx}{(x+1)^8} = -\frac{1}{7(x+1)^7} + c$$

مثال 9: أنجز التكامل التالي

$$I = \int \frac{dx}{(x^2 - 4x + 5)^3}$$

الحل: مميز ثلاثي الحدود  $x^2 - 4x + 5$  هو  $\Delta = -4 < 0$  عندئذ ثلاثي الحدود  $x^2 - 4x + 5$  لا يملك جذور حقيقية عندئذ تنتم إلى مربع كامل نجد

$$x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$$

$$I = \int \frac{dx}{((x-2)^2 + 1)^3}$$

نضع  $I = J_3$  حيث

$$J_3 = \int \frac{dx}{((x-2)^2 + 1)^3}$$

نضع  $x - 2 = t$  بالتالي  $dx = dt$

$$J_3 = \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^3}$$

نحل هذا التكامل باستخدام الدستور التدريجي، نلاحظ بأن  $r^2 = 1$  نجد

$$J_3 = J_{2+1} = \frac{1}{2 \times 1 \times 2} \left[ \frac{t}{(t^2 + 1)^2} + (2 \times 2 - 1)J_2 \right]$$

$$J_3 = \frac{t}{4(t^2 + 1)^2} + \frac{3}{4}J_2$$

$$J_2 = J_{1+1} = \frac{1}{2 \times 1 \times 1} \left[ \frac{t}{(t^2 + 1)^1} + (2 \times 1 - 1)J_1 \right]$$

$$J_2 = \frac{t}{2(t^2 + 1)} + \frac{1}{2}J_1$$

$$J_1 = \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \arctan(t) + c_1$$

نعوض بشكل تراجمي نجد

$$J_2 = \frac{t}{2(t^2 + 1)} + \frac{1}{2} \arctan(t) + \frac{1}{2}c_1$$

عندئذ

$$J_3 = \frac{t}{4(t^2 + 1)^2} + \frac{3}{4} \left( \frac{t}{2(t^2 + 1)} + \frac{1}{2} \arctan(t) + \frac{1}{2}c_1 \right)$$

$$J_3 = \frac{t}{4(t^2 + 1)^2} + \frac{3t}{8(t^2 + 1)} + \frac{3}{8} \arctan(t) + c$$

بالتالي

$$I = J_3 = \frac{x-2}{4((x-2)^2 + 1)^2} + \frac{3(x-2)}{8((x-2)^2 + 1)} + \frac{3}{8} \arctan(x-2) + c$$

$$I = \int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^m} dx \text{ دراسة التكامل من النمط}$$

لدراسة التكامل من النمط  $I = \int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^m} dx$  نكتبه بالشكل:

$$\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^m} dx = \int \frac{A(2ax+b)}{(ax^2+bx+c)^m} dx + \int \frac{B}{(ax^2+bx+c)^m} dx$$

حيث  $A$  و  $B$  ثوابت يُطلب تعيينها

نشتق الطرفين ثم نضرب الطرفين بـ  $(ax^2+bx+c)^m$  نجد  $Mx+N = A(2ax+b) + B$

بالمطابقة نحصل على الثابتين  $A$  و  $B$  بالتالي

$$I = A \times \frac{(ax^2+bx+c)^{-m+1}}{-m+1} + BI_1$$

حيث  $I_1 = \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^m}$  وهذا التكامل تم مناقشته سابقاً

**مثال 10:** أنجز التكامل

$$I = \int \frac{2x+2}{(x^2-3x+2)^2} dx$$

الحل: نكتب  $I$  بالشكل

$$\int \frac{2x+2}{(x^2-3x+2)^2} dx = \int \frac{A(2x-3)}{(x^2-3x+2)^2} dx + \int \frac{B}{(x^2-3x+2)^2} dx$$

نشق الطرفين ثم نضرب الطرفين بـ  $(x^2-3x+2)^2$  نجد

$$2x+2 = A(2x-3) + B$$

$$2x+2 = 2Ax - 3A + B$$

بالمطابقه نجد  $A = 1$  و  $B = 5$  بالتالي

$$I = \int \frac{(2x-3)}{(x^2-3x+2)^2} dx + 5 \int \frac{dx}{(x^2-3x+2)^2} = -\frac{1}{x^2-3x+2} + 5I_1$$

حيث

$$I_1 = \int \frac{dx}{(x^2-3x+2)^2}$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{(x-2)^2(x-1)^2}$$

نحلل الكسر  $\frac{1}{(x-2)^2(x-1)^2}$  إلى مجموع كسور جزئية بالشكل:

$$\frac{1}{(x-2)^2(x-1)^2} = \frac{A_1}{(x-2)^2} + \frac{A_2}{(x-2)} + \frac{B_1}{(x-1)^2} + \frac{B_2}{(x-1)} \dots (*)$$

$A_1$ : نضرب طرفي العلاقة (\*) بـ  $(x-2)^2$  ثم نعوض  $x = 2$  في العلاقة الناتجة نجد  $A_1 = 1$

$B_1$ : نضرب طرفي العلاقة (\*) بـ  $(x-1)^2$  ثم نعوض  $x = 1$  في العلاقة الناتجة نجد  $B_1 = 1$

▪ نضرب طرفي العلاقة (\*) بـ  $x$  ونجعل  $x \rightarrow +\infty$  نجد

$$A_2 + B_2 = 0 \dots (1)$$

▪ نعوض في طرفي العلاقة (\*) بـ  $x = 0$  نجد

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4}A_1 - \frac{1}{2}A_2 + B_1 - B_2$$

بالتالي

$$A_2 + 2B_2 = 2 \dots (2)$$

نحل (1) و (2) حلاً مشتركاً نجد  $A_2 = -2$  و  $B_2 = 2$

$$I_1 = \int \frac{dx}{(x^2-3x+2)^2} = \int \frac{dx}{(x-2)^2} - 2 \int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} + 2 \int \frac{dx}{x-1}$$

$$I_1 = -\frac{1}{(x-2)} - 2\ln|x-2| - \frac{1}{(x-1)} + 2\ln|x-1| + c_1$$

بالتالي

$$I = -\frac{1}{x^2-3x+2} + 5 \left( -\frac{1}{(x-2)} - 2\ln|x-2| - \frac{1}{(x-1)} + 2\ln|x-1| + c_1 \right)$$

$$I = -\frac{1}{x^2-3x+2} - \frac{5}{(x-2)} - \frac{5}{(x-1)} + 10\ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right| + c$$

-----