



كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الاولى

المادة : تحليل رياضي 2

المحاضرة : الثالثة / نظري /

{{ مكتبة A to Z }}

مكتبة A to Z Facebook Group :

كلية العلوم

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

2026

5



## المحاضرة الثالثة (نظري)

المحتوى العلمي لهذه المحاضرة يتضمن مايلي:

❖ الطرق الرئيسية في المكاملة

➤ الطريقة المباشرة

➤ طريقة تغيير المتحول

➤ طريقة المكاملة بالتجزئة

❖ العديد من الأمثلة المتعلقة بالطرق الرئيسية في المكاملة.

## الطرق الرئيسية في المكاملة

1. **الطريقة المباشرة:** تعتمد على رد التكامل المعطى إلى تكاملات شهيرة وذلك بالاعتماد على خواص التكامل غير المحدد وبعض العلاقات الجبرية.

مثال:

$$I = \int 2^x 5^{2x} dx = \int 2^x 25^x dx = \int (50)^x dx = \frac{(50)^x}{\ln(50)} + c$$

مثال:

$$I = \int \cot^2 2x dx = \int \frac{\cos^2 2x}{\sin^2 2x} dx = \int \frac{1 - \sin^2 2x}{\sin^2 2x} dx = \int \left( \frac{1}{\sin^2 2x} - 1 \right) dx = -\frac{1}{2} \cot 2x - x + c$$

مثال:

$$\begin{aligned} I &= \int \left( \sin \frac{x}{3} + \cos \frac{x}{3} \right)^2 dx = \int \left( \sin^2 \left( \frac{x}{3} \right) + \cos^2 \left( \frac{x}{3} \right) + 2 \sin \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3} \right) dx \\ &= \int \left( 1 + \sin \left( \frac{2x}{3} \right) \right) dx = x - \frac{3}{2} \cos \left( \frac{2x}{3} \right) + c \end{aligned}$$

مثال:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{chx - shx}{chx + shx} dx = \int \frac{(chx - shx)^2}{(chx + shx)(chx - shx)} dx = \int \frac{ch^2 x + sh^2 x - 2shx chx}{(ch^2 x - sh^2 x)} dx \\ &= \int \frac{ch2x - sh2x}{1} dx = \int (ch2x - sh2x) dx = \frac{1}{2} sh2x - \frac{1}{2} ch2x + c \end{aligned}$$

مثال:

$$I = \int \frac{dx}{x \ln(x)} = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} dx = \ln|\ln(x)| + c$$

## 2. طريقة تغيير المتحول

إذا لم يكن من السهولة رد التكامل المعطى إلى تكاملات موجوده في جدول التكاملات الشهيرة، فإننا نضطر أحياناً لتغيير متحول المكاملة  $x$  إلى متحول جديد  $t$  وفق العلاقة  $x = \varphi(t)$  حيث  $\varphi(t)$  دالة مستمرة و المشتق الأول لها مستمر أيضاً وعندئذ يكون لدينا:

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

نوجد هذا التكامل بدلالة  $t$  ثم نبدل في ناتج التكامل النهائي  $t$  بما يساويها بدلالة  $x$ .

مثال: أنجز التكامل

$$I_1 = \int \frac{x^3}{(x-1)^2} dx$$

الحل:

نفرض أن  $t = x - 1$  و منه  $dt = dx$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{(t+1)^3}{t^2} dt = \int \left( \frac{t^3 + 3t^2 + 3t + 1}{t^2} \right) dt = \int \left( t + 3 + \frac{3}{t} + \frac{1}{t^2} \right) dt \\ &= \frac{t^2}{2} + 3t + 3 \ln|t| - \frac{1}{t} + c = \frac{(x-1)^2}{2} + 3(x-1) + 3 \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c \end{aligned}$$

مثال: أنجز التكامل

$$I_2 = \int \sqrt{3x+1} dx$$

الحل: نفرض  $t = \sqrt{3x+1}$  عندئذ  $t^2 = 3x+1$  فيكون  $2t dt = 3dx$  وبالتالي  $dx = \frac{2}{3} t dt$ 

$$I_2 = \int t \left(\frac{2}{3} t\right) dt = \frac{2}{3} \int t^2 dt = \frac{2}{9} t^3 + c = \frac{2}{9} \left((3x+1)^{\frac{1}{2}}\right)^3 + c = \frac{2}{9} \sqrt{(3x+1)^3} + c$$

مثال: أنجز التكامل

$$I_3 = \int \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \sqrt{x} dx$$

الحل: نفرض  $t = \sqrt{x}$  فيكون  $dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2t} dx$  وبالتالي  $dx = 2t dt$ 

$$I_3 = \int \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \sqrt{x} dx = \int 2 \sin t dt = -2 \cos t + c = -2 \cos \sqrt{x} + c$$

مثال: أنجز التكامل

$$I_4 = \int \frac{1}{x} \cos(\ln(x)) dx$$

الحل: نفرض  $t = \ln(x)$  فيكون  $dt = \frac{1}{x} dx$ 

$$I_4 = \int \frac{1}{x} \cos(\ln(x)) dx = \int \cos t dt = \sin t + c = \sin(\ln(x)) + c$$

مثال: أنجز التكامل

$$I_5 = \int x \sqrt{3-x} dx$$

الحل: نفرض  $t = 3-x$  فيكون  $dt = -dx$ 

$$I_5 = \int x \sqrt{3-x} dx = - \int (3-t) \sqrt{t} dt = \int \left( +t^{\frac{3}{2}} - 3t^{\frac{1}{2}} \right) dt = \frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 3 \times \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} - 2t^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{5} \sqrt{t^5} - 2\sqrt{t^3} + c$$

$$= \frac{2}{5} \sqrt{(3-x)^5} - 2\sqrt{(3-x)^3} + c$$

الآن نقدم قواعد مهمة لحساب بعض التكاملات

قواعد هامة جداً:

من أجل  $a > 0$  و  $b > 0$ 

التابع $f(x)$	تكامل التابع $f(x)$ ( $\int f(x) dx$ )
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}}$	$\frac{1}{b} \arcsin\left(\frac{bx}{a}\right) + c$ or $-\frac{1}{b} \arccos\left(\frac{bx}{a}\right) + c$ حيث $x \in ]-1, 1[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$	$\ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + c$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$	$\ln\left x + \sqrt{x^2 - a^2}\right  + c$
$f(x) = \frac{1}{a^2 + b^2 x^2}$	$\frac{1}{ab} \arctan\left(\frac{bx}{a}\right) + c$
$f(x) = \frac{1}{a^2 - b^2 x^2}$	$\frac{1}{2ab} \ln\left \frac{a+bx}{a-bx}\right  + c$

## اثبات الخاصة 4

$$I = \int \frac{dx}{a^2 + b^2x^2} = \frac{1}{ab} \arctan\left(\frac{bx}{a}\right) + c$$

$$I = \int \frac{dx}{a^2 + b^2x^2} = \int \frac{dx}{a^2 \left(1 + \left(\frac{bx}{a}\right)^2\right)} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{\left(1 + \left(\frac{bx}{a}\right)^2\right)}$$

نضع  $t = \frac{bx}{a}$  بالتالي

$$dt = \frac{b}{a} dx$$

$$I = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{\left(1 + \left(\frac{bx}{a}\right)^2\right)} = \frac{1}{ab} \int \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{ab} \arctan t + c = \frac{1}{ab} \arctan\left(\frac{bx}{a}\right) + c$$

أمثلة:

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 25}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 25}\right) + c$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - 2}\right| + c$$

$$I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{5 - 2x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2 x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{5}}\right) + c \text{ or } -\frac{1}{\sqrt{2}} \arccos\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{5}}\right) + c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{5}}x\right) + c \text{ or } -\frac{1}{\sqrt{2}} \arccos\left(\sqrt{\frac{2}{5}}x\right) + c$$

$$I_4 = \int \frac{dx}{7 + 2x^2} = \int \frac{dx}{(\sqrt{7})^2 + (\sqrt{2})^2 x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{7}}\right) + c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{14}} \arctan\left(\sqrt{\frac{2}{7}}x\right) + c$$

$$I_5 = \int \frac{dx}{2 - 4x^2} = \frac{1}{2\sqrt{2} \times 2} \ln\left|\frac{\sqrt{2} + 2x}{\sqrt{2} - 2x}\right| + c$$

## 3. طريقه بالمكاملة بالتجزئة

لتكن لدينا الدالتان  $u(x), v(x)$  القابلتان للاشتقاق حيث المشتق الأول لكل منهما دالة مستمرة على مجال ما، يُعطى دستور التكامل بالتجزئة بالعلاقة الآتية:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

مثال: استخدم طريقة المكاملة بالتجزئة لإيجاد

$$I = \int \frac{x}{\sin^2 x} dx$$

الحل: نضع

$$u = x, \quad du = dx$$

$$dv = \frac{dx}{\sin^2 x}, \quad v = -\cot x$$

$$I = uv - \int v du = -x \cot x + \ln|\sin x| + c$$

مثال: أنجز التكامل

$$I = \int x \cos x dx$$

الحل: نضع

$$u = x, \quad du = dx$$

$$dv = \cos x dx, \quad v = \sin x$$

$$I = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + c$$

**ملاحظة:** إن دستور التكامل بالتجزئة يُسهل علينا حساب التكامل إذا أحسنا اختيار كل من  $u, dv$  فمثلاً في التكامل السابق في حال فرضنا  $u(x) = \cos x$  و  $dv = x dx$  حصلنا على تكامل أصعب من التكامل  $I$ ، لذلك سنصنف الجزء الأكبر من التكاملات في ثلاث مجموعات لكل منها فرضيتها الخاصة، مع التأكيد على ان المجموعات الثلاث لا تشمل كل التكاملات التي يمكن حلها بطريقة التجزئة.

المجموعة الأولى: التكاملات من الشكل

$$\int P_n(x) \arcsin(bx) dx \quad \int P_n(x) \arccos(bx) dx, \quad \int P_n(x) \arctan(bx) dx$$

$$\int P_n(x) \operatorname{arccot}(bx) dx, \quad \int P_n(x) \ln^m(bx) dx$$

حيث  $P_n(x)$  كثير حدود من الدرجة  $n$  و  $m$  عدد طبيعي و  $b$  عدد حقيقي غير معدوم  
لحل هذه التكاملات نكامل بالتجزئة حيث نغرض أن  $dv = P_n(x) dx$  والباقي في العبارة المكاملة هو  $u$ .  
أمثلة:

مثال: أنجز التكامل

$$I = \int x \ln(x) dx$$

الحل: نضع

$$u = \ln(x), \quad du = \frac{dx}{x}$$

$$dv = x dx, \quad v = \frac{1}{2} x^2$$

بالتالي:

$$I = \frac{1}{2} x^2 \ln(x) - \int \frac{1}{2} x^2 \times \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} x^2 \ln(x) - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln(x) - \frac{1}{4} x^2 + c$$

مثال: أنجز التكامل

$$I = \int \arcsin(x) dx$$

الحل:

نضع

$$u = \arcsin(x), \quad du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$dv = dx, \quad v = x$$

نعوض في دستور التكامل بالتجزئة:

$$I = x \arcsin(x) - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \arcsin(x) + \int \frac{-2x dx}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$I = x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + c$$

مثال: أنجز التكامل

$$I = \int \ln(x) dx$$

الحل: نضع

$$u = \ln(x), \quad du = \frac{dx}{x}$$

$$dv = dx, \quad v = x$$

بالتالي:

$$I = x \ln(x) - \int dx = x \ln(x) - x + c$$

مثال: أنجز التكامل

$$I = \int x^3 \ln(x) dx$$

الحل: نضع

$$u = \ln(x), \quad du = \frac{dx}{x}$$

$$dv = x^3 dx, \quad v = \frac{x^4}{4}$$

بالتالي:

$$I = \frac{x^4}{4} \ln(x) - \int \frac{x^3}{4} dx = \frac{x^4}{4} \ln(x) - \frac{x^4}{16} + c$$

مثال: أنجز التكامل

$$I = \int x \ln^2(x) dx$$

الحل: نضع

$$u = \ln^2(x), \quad du = \frac{2 \ln(x)}{x} dx$$

$$dv = x dx, \quad v = \frac{x^2}{2}$$

بالتالي:

$$I = \frac{x^2}{2} \ln^2(x) - \underbrace{\int x \ln(x) dx}_J$$

وجدنا في مثال سابق أن

$$J = \int x \ln(x) dx = \frac{1}{2} x^2 \ln(x) - \frac{1}{4} x^2 + c_1$$

بالتالي

$$I = \frac{x^2}{2} \ln^2(x) - \frac{1}{2} x^2 \ln(x) + \frac{1}{4} x^2 + c$$

مثال: أنجز التكامل

$$I = \int x \arctan(x) dx$$

الحل: نضع

$$u = \arctan(x), \quad du = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$dv = x dx, \quad v = \frac{x^2}{2}$$

بالتالي:

$$I = \frac{1}{2} x^2 \arctan(x) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} x^2 \arctan(x) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1} dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \arctan(x) - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \arctan(x) - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arctan(x) + c$$

المجموعة الثانية: التكاملات من الشكل

$$\int P_n(x) e^{ax} dx, \quad \int P_n(x) \sin ax dx, \quad \int P_n(x) \cos ax dx$$

حيث  $P_n(x)$  كثير حدود من الدرجة  $n$  و  $a$  و  $\alpha$  ثابتين حقيقيين

لحل هذه التكاملات نكامل بالتجزئة حيث نفرض  $u(x) = P_n(x)$  والباقي في العبارة المكاملة نختاره مساوياً لـ  $dv$ ، ثم نعوض بدستور التكامل بالتجزئة.

هنا نستخدم قانون المكامله بالتجزئة  $n$  مره حيث  $n$  درجة كثيرة الحدود  $P_n(x)$ .

مثال: أنجز التكامل

$$I = \int x \sin x dx$$

الحل: نضع

$$u = x, \quad du = dx$$

$$dv = \sin x dx, \quad v = -\cos x$$

$$I = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + c$$

مثال: أنجز التكامل

$$I = \int (x^2 - 6x + 2) e^{3x} dx$$

الحل: نضع

$$u = x^2 - 6x + 2, \quad du = (2x - 6) dx$$

$$dv = e^{3x} dx, \quad v = \frac{1}{3} e^{3x}$$

عندئذٍ

$$I = \frac{1}{3} (x^2 - 6x + 2) e^{3x} - \int \frac{1}{3} (2x - 6) e^{3x} dx$$

$$I = \frac{1}{3} (x^2 - 6x + 2) e^{3x} - \frac{2}{3} \underbrace{\int (x - 3) e^{3x} dx}_J$$

نكامل  $J$  بالتجزئة أيضاً فنفرض

$$u = x - 3, \quad du = dx$$

$$dv = e^{3x} dx, \quad v = \frac{1}{3} e^{3x}$$

ومنه:

$$J = \frac{1}{3}(x - 3)e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx = \frac{1}{3}(x - 3)e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} + c_1$$

نعوض في عبارة  $I$  نجد:

$$I = \frac{1}{3}(x^2 - 6x + 2)e^{3x} - \frac{2}{3} \left( \frac{1}{3}(x - 3)e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} + c_1 \right)$$

و بالتالي:

$$I = \frac{1}{3}(x^2 - 6x + 2)e^{3x} - \frac{2}{9}(x - 3)e^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + c$$

مثال: أنجز التكامل

$$I = \int x^2 \cos x dx$$

الحل: نضع

$$u = x^2, \quad du = 2x dx$$

$$dv = \cos x dx, \quad v = \sin x$$

عندئذ:

$$I = x^2 \sin x - \int 2x \sin x dx$$

$$I = x^2 \sin x - \underbrace{\int 2x \sin x dx}_J$$

نكامل  $J$  بالتجزئة أيضاً فنفرض

$$u = 2x, \quad du = 2 dx$$

$$dv = \sin x dx, \quad v = -\cos x$$

ومنه:

$$J = -2x \cos x + 2 \sin x + c_1$$

نعوض في عبارة  $I$  نجد:

$$I = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c$$

المجموعة الثالثة: التكاملات من الشكل

$$I = \int e^{ax} \cos bx dx, \quad I = \int e^{ax} \sin bx dx; \quad a, b \in \mathbb{R}$$

تُحلّ بالتجزئة حيث نفرض أن  $u(x)$  هو إما الدالة الأسية أو المثلثية و ما يبقى داخل العبارة المكاملة هو  $dv$ .(توضيح: هنا نطبق قانون المكاملة بالتجزئة مرتين متتاليتين، فنحصل على معادلة خطيه في  $I$ ، نوجد منها قيمة  $I$ ، معالاشارة إلى أنّ اختيار  $u$  و  $dv$  في هذه التكاملات غير مهم)

مثال: أنجز التكامل

$$I = \int e^{2x} \sin(3x) dx$$

الحل: نفرض

$$u = e^{2x}, \quad du = 2e^{2x} dx$$

$$dv = \sin(3x) dx, \quad v = -\frac{1}{3} \cos(3x)$$

$$I = -\frac{1}{3} e^{2x} \cos(3x) + \frac{2}{3} \underbrace{\int e^{2x} \cos 3x dx}_J$$

نكامل  $J$  بالتجزئة:

$$u = e^{2x}, \quad du = 2e^{2x} dx$$

$$dv = \cos(3x) dx, \quad v = \frac{1}{3} \sin(3x)$$

عندئذ:

$$J = \frac{1}{3} e^{2x} \sin(3x) - \frac{2}{3} \int e^{2x} \sin(3x) dx = \frac{1}{3} e^{2x} \sin(3x) - \frac{2}{3} I$$

نعوض في عبارة  $I$ :

$$I = -\frac{1}{3} e^{2x} \cos(3x) + \frac{2}{3} \left( \frac{1}{3} e^{2x} \sin(3x) - \frac{2}{3} I \right)$$

$$I = -\frac{1}{3} e^{2x} \cos(3x) + \frac{2}{9} e^{2x} \sin(3x) - \frac{4}{9} I$$

$$I + \frac{4}{9} I = -\frac{1}{3} e^{2x} \cos(3x) + \frac{2}{9} e^{2x} \sin(3x)$$

$$\frac{13}{9} I = -\frac{1}{3} e^{2x} \cos(3x) + \frac{2}{9} e^{2x} \sin(3x)$$

$$I = \frac{9}{13} \left( -\frac{1}{3} e^{2x} \cos(3x) + \frac{2}{9} e^{2x} \sin(3x) \right)$$

$$I = -\frac{3}{13} e^{2x} \cos(3x) + \frac{2}{13} e^{2x} \sin(3x) + c$$

مثال: أنجز التكامل

$$\int e^x \sin x dx$$

الحل: بسهولة نجد

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2} (-\cos x + \sin x) + c$$