



كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الرابعة

المادة : انصاف نواقل

المحاضرة : الرابعة/نظري/د. حسن سليمان

{{ مكتبة A to Z }}

مكتبة A to Z Facebook Group :

كلية العلوم

14

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

### 13 دراسة مستوى فيرمي والتركيز المتوازن لحاملات الشحنة في أنصاف النواقل اللامتحلة

والحاوية مانحات: 2026/4/9

- يتصف نصف الناقل الإلكتروني غير المتحلل بتركيز عالٍ نسبياً من إلكترونات الناقلية. ومن أجل نصف ناقل كهذا، لدينا:

$$N_d \neq 0; \quad N_a = 0. \quad (1-13)$$

- إنَّ احتمال انتقال الإلكترونات من عصابة التكافؤ عبر المنطقة المحظورة إلى عصابة الناقلية، في **درجة حرارة منخفضة**، أقل من احتمال انتقالها من المستويات المانحة بشكل ملحوظ.

- **ومن ثمَّ في درجة حرارة منخفضة نسبياً يمكن إهمال تركيز الثقوب الحرة**،  $p_0$ ، بالمقارنة مع تركيز الإلكترونات الحرة،  $n_0$ ، وتركيز الثقوب المقيدة في المانحات (تركيز المانحات أحادية التأين)،  $p_d$ .
- هذا يعني، أنه في **درجة حرارة منخفضة نسبياً**، يكون شرط الاعتدال الكهربائي من الشكل الآتي:

$$n_0 = p_d. \quad (2-13)$$

- وفي **درجة حرارة أعلى من سابقتها**، يرتفع احتمال انتقال الإلكترونات عبر المنطقة المحظورة، وعندها، يمكن للشوائب أن **تُستنفد**، أي تتأين بأكملها.
- **ولكن**، في مثل هذه الحالة، وكما سيتضح لاحقاً، **يتحول** نصف الناقل خارج مجال **استنفاد** الشوائب، من نصف ناقل إلكتروني إلى نصف ناقل ذاتي؛ **وعندها**، يُكتب شرط الاعتدال الكهربائي بالشكل الآتي:

$$n_0 = p_d + p_0. \quad (3-13)$$

ثمَّ يُفترض أن **كل المانحات متأينة**، بحيث أن

$$p_d = N_d^+ = N_d. \quad (4-13)$$

**أولاً-** دراسة نصف ناقل مشوب في درجة حرارة منخفضة:

لندرس الحالة التي تُعبّر عنها العلاقة (2-13): لدينا من العلاقتين (16-11) و (10-10) التراكيز الآتية:

$$p_d = \frac{N_d}{2 e^{\frac{E_F - E_d}{k_B T}} + 1} \quad \text{و} \quad n_0 = N_c e^{-\frac{E_c - E_F}{k_B T}}$$

وتبعاً للعلاقة (2-13) نحصل على المساواة الآتية:

$$N_c e^{-\frac{E_c - E_F}{k_B T}} = \frac{N_d}{2 e^{\frac{E_F - E_d}{k_B T}} + 1}; \quad (5-13)$$

$$N_c e^{-\frac{E_c}{k_B T}} e^{\frac{E_F}{k_B T}} = \frac{N_d}{2 e^{\frac{E_F}{k_B T}} e^{\frac{-E_d}{k_B T}} + 1};$$

ندخل في الدراسة الرمز الآتي:

$$e^{\frac{E_F}{k_B T}} = x. \quad (6-13)$$

$$N_c e^{-\frac{E_c}{k_B T}} x = \frac{N_d}{2 x e^{\frac{-E_d}{k_B T}} + 1};$$

نضرب طرفي المعادلة (5-13) بمقام الطرف الأيمن ونأخذ بالحسبان العلاقة (6-13)،

فحصل على معادلة جبرية من الدرجة الثانية، من الشكل

$$2N_c e^{\frac{E_c + E_d}{k_B T}} x^2 + N_c e^{\frac{E_c}{k_B T}} x - N_d = 0. \quad (7-13)$$

وهي معادلة جبرية من الدرجة الثانية لها الشكل  $Ax^2 + Bx + C = 0$ ، وحلها هو:

$$x = \frac{-N_c e^{-\frac{E_c}{k_B T}} + \sqrt{N_c^2 e^{\frac{-2E_c}{k_B T}} + 8N_c N_d e^{\frac{E_c + E_d}{k_B T}}}}{4N_c e^{\frac{E_c + E_d}{k_B T}}}. \quad (8-13)$$

**اكتفينا** بالجذر التربيعي الموجب (الحل الموجب)، لأنه من الواضح، من العلاقة (6-13)، أن

$x > 0$ . وينتج لدينا من المعادلة الأخيرة (8-13) المساواة الآتية:

$$x = \frac{-N_c e^{\frac{E_c}{k_B T}} + \sqrt{N_c^2 e^{\frac{-2E_c}{k_B T}} + 8N_c N_d e^{\frac{E_c - E_d}{k_B T}}}}{4N_c e^{\frac{E_c}{k_B T}} e^{\frac{E_d}{k_B T}}};$$

$$x = \frac{-N_c e^{\frac{E_c}{k_B T}} + N_c e^{\frac{E_c}{k_B T}} \sqrt{1 + 8 \frac{N_d}{N_c} e^{\frac{E_c - E_d}{k_B T}}}}{4N_c e^{\frac{E_c}{k_B T}} e^{\frac{E_d}{k_B T}}};$$

$$e^{\frac{E_F}{k_B T}} = \frac{1}{4} e^{\frac{E_d}{k_B T}} \left( \sqrt{1 + 8 \frac{N_d}{N_c} e^{\frac{\Delta E_d}{k_B T}}} - 1 \right), \quad (9-13)$$

حيث

$$\Delta E_d = E_c - E_d . \quad (10-13)$$

طاقة تأين الذرة المانحة

ومن ثم

$$E_F = k_B T \ln \left[ \frac{1}{4} e^{\frac{E_d}{k_B T}} \left( \sqrt{1 + \frac{8N_d}{N_c} e^{\frac{\Delta E_d}{k_B T}}} - 1 \right) \right]. \quad (11a-13)$$

أو

$$E_F = E_d + k_B T \ln \left[ \frac{1}{4} \left( \sqrt{1 + \frac{8N_d}{N_c} e^{\frac{\Delta E_d}{k_B T}}} - 1 \right) \right]. \quad (11b-13)$$

تعبّر العلاقة (11-13) عن موضع مستوى فرمي؛ **كتابع لدرجة الحرارة** من أجل نصف ناقل إلكتروني **ليس متحللاً**، إلا أنها معقدة لدرجة لا يمكن تحليلها ببساطة، ولهذا السبب، سندرس **حالتين حديتين** لهذه التابعة المركبة:

**إذ نُحدِّد في البداية** درجات الحرارة **الأكثر انخفاضاً (المنخفضة جداً)** بوساطة المتراجحة

$$\frac{8N_d}{N_c} e^{\frac{\Delta E_d}{k_B T}} \gg 1. \quad (12-13)$$

**يمكن تحقيق** مثل هذه المتراجحة

→ **بوساطة** الأس الذي يُعدُّ كبيراً عندما  $T$  صغيرة،

→ وبوساطة العامل الأسّي،  $8N_d / N_c$ ، أيضاً، **طالما** أن كثافة الحالات،  $N_c$ ،

**تتناقص** بانخفاض درجة الحرارة وتركيز المانحات،  $N_d$ ، لا يتعلق بها (راجع العلاقة

.(10-11).

→ من الواضح أن **مفهوم** درجات الحرارة الأكثر انخفاضاً **يُعدُّ**، وفقاً للعلاقة (12-13)،

مفهوماً **خاصاً**؛ أي من أجل كل نصف ناقل ثمة مجال لدرجات الحرارة الأكثر

انخفاضاً **خاص به**.

وهكذا نفرض أن اللامساواة (12-13) محققة، **فضلاً عن إهمال الواحد** في العلاقة

(11a-13)، **في القوسين المتوسطين**، فنحصل على العلاقة الآتية:

$$E_F = k_B T \ln \left( \frac{1}{4} e^{\frac{E_d}{k_B T}} \sqrt{\frac{8N_d}{N_c} e^{\frac{\Delta E_d}{k_B T}}} \right). \quad (13-13)$$

$$E_F = k_B T \ln e^{\frac{E_d}{k_B T}} + k_B T \ln \left( \frac{8N_d}{16N_c} e^{\frac{\Delta E_d}{k_B T}} \right)^{1/2} = k_B T \frac{E_d}{k_B T} + \frac{1}{2} k_B T \left( \frac{\Delta E_d}{k_B T} + \ln \frac{N_d}{2N_c} \right)$$

$$\therefore E_F = E_d + \frac{1}{2}(E_c - E_d) + \frac{k_B T}{2} \ln \frac{N_d}{2N_c},$$

ومن ثمَّ نحصل على علاقة موضع مستوى فرمي ضمن التقريب المشار إليه أعلاه الآتية:

$$E_F = \frac{E_c + E_d}{2} + \frac{k_B T}{2} \ln \frac{N_d}{2N_c}. \quad (14-13)$$

وهذا يعني أنه يمكن تحليل مستوى فيرمي وفق العلاقة (14-13) بسهولة، ويمكن استخدامها أيضاً بهدف إيجاد التركيز المتوازن للإلكترونات،  $n_0$ ، وفقاً للعلاقة (16-11)؛ إذ ينتج من

$$\text{العلاقتين (16-11)، } n_0 = N_c e^{-\frac{E_c - E_F}{k_B T}}, \text{ و (14-13) علاقة جديدة من أجل } n_0:$$

$$\begin{aligned} n_0 &= N_c e^{-\frac{1}{k_B T} \left( E_c - \frac{E_c + E_d}{2} + \frac{k_B T}{2} \ln \frac{N_d}{2N_c} \right)}; \\ &= N_c e^{-\frac{1}{k_B T} \left( \frac{E_c - E_d}{2} \right)} e^{\left( \ln \frac{N_d}{2N_c} \right)^{1/2}} \\ &= N_c e^{-\frac{1}{k_B T} \left( \frac{E_c - E_d}{2} \right)} e^{\ln \left( \frac{N_d}{2N_c} \right)^{1/2}} = N_c e^{-\frac{\Delta E_d}{2k_B T}} \sqrt{\frac{N_d}{2N_c}}, \end{aligned}$$

ومن ثمَّ

$$n_0 = \sqrt{\frac{N_c N_d}{2}} e^{-\frac{\Delta E_d}{2k_B T}}. \quad (15-13)$$

لنعين الآن مستوى فرمي وتركيز إلكترونات الناقلية **من أجل درجات الحرارة المنخفضة** أي من أجل الشرط

$$\frac{8N_d}{N_c} e^{\frac{\Delta E_d}{k_B T}} \ll 1. \quad (16-13)$$

يوافق هذا المعيار **الحدّ العلوي لدرجات الحرارة المنخفضة**.

باستخدام منشور الجذر التربيعي في سلسلة، عندما  $\alpha \ll 1$ ، نجد:

$$\sqrt{1+\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^2}{8} + \dots \quad (17-13)$$

وبالافتقار بالحدّين الأول والثاني من المنشور الناتج، نستطيع إعادة كتابة العلاقة (11b-13) بالشكل الآتي:

$$E_F = E_d + k_B T \ln \left[ \frac{1}{4} \left( \sqrt{1 + \frac{8N_d}{N_c} e^{\frac{\Delta E_d}{k_B T}}} - 1 \right) \right] \cong E_d + k_B T \ln \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{4N_d}{N_c} e^{\frac{\Delta E_d}{k_B T}} - 1 \right)$$

$$= E_d + k_B T \ln \left( \frac{N_d}{N_c} e^{\frac{\Delta E_d}{k_B T}} \right) = E_d + k_B T \left( \ln \frac{N_d}{N_c} + \frac{\Delta E_d}{k_B T} \right) = E_d + k_B T \ln \frac{N_d}{N_c} + \Delta E_d .$$

ومن ثمّ:

$$E_F = E_c + k_B T \ln \frac{N_d}{N_c} . \quad (18-13)$$

وبوضع العلاقة (18-13) في العلاقة (16-11)، نحصل على المساواة الآتية:

$$n_0 = N_c e^{-\frac{E_c - E_F}{k_B T}} = N_c e^{-\frac{E_c}{k_B T}} e^{\frac{E_F}{k_B T}} = N_c e^{-\frac{E_c}{k_B T}} e^{\frac{E_c + k_B T \ln(N_d / N_c)}{k_B T}}$$

$$= N_c e^{\ln(N_d / N_c)} = N_c \frac{N_d}{N_c} .$$

ومن ثمّ:

$$n_0 = N_d . \quad (19-13)$$

→ بهذه الطريقة، نجد أن تركيز الإلكترونات الحرة،  $n_0$ ، عند تحقق المتراجحة (16-13)، **مستقلّ عن درجة الحرارة** ويساوي لتركيز الشوائب؛ وهذا ما يوافق مجال **استنفاد الشوائب** التي تبدو متأينة بشكلٍ كاملٍ.

→ نلاحظ أن تركيز الحاملات الأساسية للشحنة (الثقوب)، في مجال استنفاد الشوائب، سيزداد **أسياً** بارتفاع درجة الحرارة، طالما أن **قانون الكتل** الفعّالة ما زال محققاً:

$$p_0 = \frac{n_i^2}{n_0} = \frac{N_c N_v}{N_d} e^{-\frac{\Delta E_0}{k_B T}} . \quad (20-13)$$

→ إن المعادلة (20-13) **تبقى محققة**، طالما بقي تركيز الثقوب أقل بكثير من تركيز الإلكترونات:

$$p_0 \ll n_0 = N_d^+ = N_d . \quad (21-13)$$

→ بتعبير آخر، تنشأ الثقوب نتيجة لتنشيطها حرارياً عبر المنطقة المحظورة، ومن

الممكن عدم احتساب تغيرات التركيز  $n_0$ ، فقط لأن هذا التركيز قليل.

بهذه الطريقة نجد، أن درجات الحرارة المنخفضة توافق مجالاً؛ من  $0\text{ K}$  حتى مجال استفاد الشوائب ضمناً، ويمكن لهذا المجال أن يكون عريضاً كفايةً. فعلى سبيل المثال: يبلغ من أجل السيلكون Si،  $400\text{ K}$ ؛ وفي هذا المجال تحديداً، سيكون نصف الناقل إلكترونياً (أي من النوع-n).

تجد الإشارة في الختام إلى أنه يمكن حساب تركيز الحاملات الأساسية للشحنة،

$p_0$ ، من أجل أي درجة حرارة، في المجال المشار إليه، من العلاقة الآتية:

$$p_0 = N_v e^{-\frac{E_F - E_v}{k_B T}}$$

وهكذا يوافق أعلى مستوى فيرمي في درجة الحرارة المعطاة تركيز مرتفع من الحاملات الأساسية،  $n_0$ ، وتركيز منخفض من الحاملات الأساسية،  $p_0$ . ثم إن التراكيز المتوازنة لحاملات الشحنة- في حالتها العوز والإغناء بالحاملات الأساسية وظهور شحنات حجمية في التماسات والطبقات تحت السطحية تُحسب من العلاقتين:

$$p = N_v e^{-\frac{E_F - E_v}{k_B T}} \quad \text{و} \quad n = N_c e^{-\frac{E_c - E_F}{k_B T}}$$

**ثانياً-** دراسة نصف ناقل مشوب في درجة حرارة مرتفعة:

في هذه الحالة، نكتب شرط الاعتدال الكهربائي على شكل العلاقة (13-3) مع الأخذ بالحسبان العلاقة (4-3)، حيث نجد:

$$n_0 = p_0 + N_d \quad (22-13)$$

وباستخدام قانون فعل الكتلة تنتج المساواة الآتية:

$$n_0 = \frac{n_i^2}{n_0} + N_d \quad (23-13)$$

ومنه، نحصل على معادلة جبرية من الدرجة الثانية بالنسبة للتركيز  $n_0$ ، من الشكل

$$n_0^2 - N_d n_0 - n_i^2 = 0 \quad (24-13)$$

وهي معادلة جبرية من الدرجة الثانية مشابهة للمعادلة  $Ax^2 + Bx + C = 0$ ، ومن ثم يأخذ

حل المعادلة (24-13) بالنسبة للمقدار  $n_0$  بدلالة التركيز الذاتي للإلكترونات  $n_i$  وتركيز

المانحات  $N_d$  الشكل الآتي (تحقق من ذلك!):

$$n_0 = \frac{1}{2} \left( N_d \mp \sqrt{N_d^2 + 4n_i^2} \right)$$

$$\therefore n_0 = \frac{N_d}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4n_i^2}{N_d^2}} \right). \quad (25-13)$$

حيث اخترنا الإشارة موجب فقط للجذر التربيعي، لأن  $n_0 > 0$ .

أضف إلى ذلك، باستخدام العلاقة (11-16) نحصل على المساواة الآتية:

$$n_0 = N_c e^{-\frac{E_c - E_F}{k_B T}} = \frac{N_d}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4n_i^2}{N_d^2}} \right).$$

$$e^{-\frac{E_c - E_F}{k_B T}} = \frac{N_d}{2N_c} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4n_i^2}{N_d^2}} \right);$$

ومن ثم:

$$-\frac{E_c - E_F}{k_B T} = \ln \left[ \frac{N_d}{2N_c} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4n_i^2}{N_d^2}} \right) \right]; \quad (26-13)$$

ومنه نحصل على علاقة تعيين سوية فيرمي في درجة الحرارة المرتفعة الآتية:

$$E_F = E_c + k_B T \ln \left[ \frac{N_d}{2N_c} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4n_i^2}{N_d^2}} \right) \right]. \quad (27-13)$$

ندرس هنا **حالتين حرجتين**؛ نضع في البداية: تحقق الحالة الحرجة الأولى المتراجحة

$$\frac{4n_i^2}{N_d^2} \ll 1. \quad (28-13)$$

توافق هذه المتراجحة مجال **درجات الحرارة الوسطية**، وبدقة أكثر، مجال استنفاد الشوائب،

لأننا نحصل من العلاقتين (13-25) و (13-27) على العلاقتين (13-19) و (13-18) مرة

أخرى:

$$E_F = E_c + k_B T \ln \frac{N_d}{N_c} \quad \text{و} \quad n_0 = N_d.$$

بهذه الطريقة، نجد أن درجات الحرارة المنخفضة والمرتفعة، **تنقطع** في مجال استنفاد الشوائب.

وتحقق الحالة الحرجة الثانية المتراجحة:

$$\frac{4n_i^2}{N_d^2} \gg 1. \quad (29-13)$$

نحصل في هذه الحالة من العلاقة (13-27) على العلاقة الآتية مباشرة:

$$E_F = E_c + k_B T \ln \frac{n_i}{N_c}. \quad (30-13)$$

أو على العلاقة الآتية إذا أخذنا بالحسيان أن  $n_i = \sqrt{N_c N_v} e^{-\frac{E_c - E_v}{2k_B T}}$  . إذن:

$$\begin{aligned} E_F &= E_c + k_B T \ln \left( \frac{N_c N_v}{N_c^2} e^{-\frac{E_c - E_F}{k_B T}} \right)^{1/2} = E_c + k_B T \left[ -\frac{E_c - E_F}{2k_B T} + \ln \left( \frac{N_v}{N_c} \right)^{1/2} \right] \\ &= E_c - \frac{1}{2} E_c + \frac{1}{2} E_F + \frac{1}{2} \ln \frac{N_v}{N_c} \\ \therefore E_F &= \frac{E_c + E_v}{2} + \frac{k_B T}{2} \ln \frac{N_v}{N_c}. \quad (31-13) \end{aligned}$$

من الواضح، أن العلاقة (31-13)، تتطابق مع العلاقة الموافقة لحالة نصف ناقل ذاتي، راجع العلاقة (4-12).

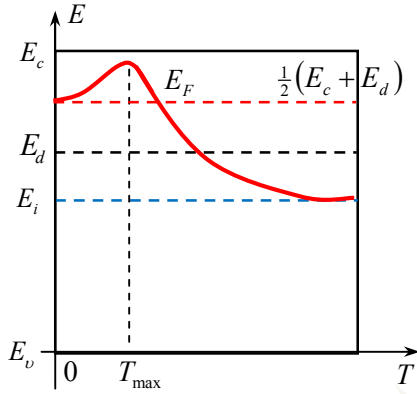
## التمثيل البياني لمستوى فرمي وتركيز حاملات الشحنة في نصف ناقل مشوب يحوي مانحات تبعاً لدرجة الحرارة:

Thermal-Graphical Representative of Fermi Level and Charge Carrier Concentration in a Donor Semiconductor

يوضح **الشكل (7)** التبعية الحرارية لمستوى فرمي من أجل قيمة معطاة لتركيز

المانحات،  $N_d$ ، في الدرجة  $T = 0 \text{ K}$ ، نحصل من العلاقة (13-14) على المساواة

$$E_F = \frac{E_c + E_d}{2} \quad (32-13)$$



الشكل (7): تابعة سوية فيرمي لدرجة الحرارة المطلقة من أجل نصف ناقل مشوب بمانحات.

■ وهذا يعني أن مستوى فيرمي يقع في هذه الحالة في منتصف الفاصل الطاقى، ما بين قاع عصابة الناقلية والمستوى الطاقى للذرة المانحة؛

■ وبارتفاع درجة الحرارة، يرتفع مستوى

فيرمي في البداية **ويبلغ نهاية حرجة**

**عظمى** (يتعلق موقعها بقيمة  $N_d$ )

**ثم ينخفض**. فعندما  $N_c = \frac{1}{2} N_d$ ،

**يقطع** المنحني  $E_F = f(T)$  الخط

الأفقى الموافق للطاقة،  $\frac{1}{2}(E_c + E_d)$ ، **ثم يهبط** ليصل إلى السوية الطاقية  $E_d$  متجاوزاً إياها مع الاستمرار بارتفاع درجة الحرارة.

■ يقع مجال استنفاد الشوائب في إحدى مقاطع مستوى فيرمي،  $E_F$ ، بجوار المستوى

الطاقى الذاتى  $E_i$  (أى بالقرب منه). ويكون المسار اللاحق لمستوى فيرمي،  $E_F$ ،

**بحيث يبدو** نصف الناقل المدروس وكأنه **ذاتي**.

إذا كانت تابعة تركيز حاملات الأساسية للشحنة (الإلكترونات هنا) لدرجة الحرارة ممثلةً

بالشكل؛  $\log n_0 = f(1/T)$ ، فإننا نحصل على ثلاث قطع مستقيمة، كما يظهر في **الشكل**

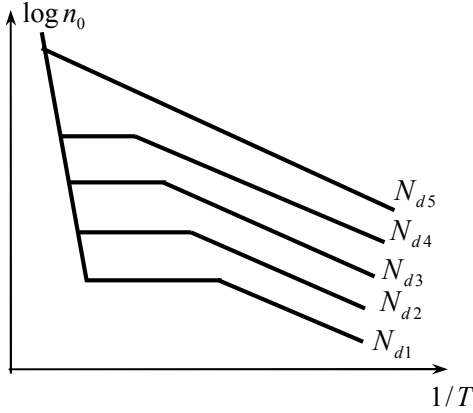
(8):

→ ففي درجات الحرارة المنخفضة يكون لدينا نصف ناقل من النوع- $n$ ، ويميل المستقيم

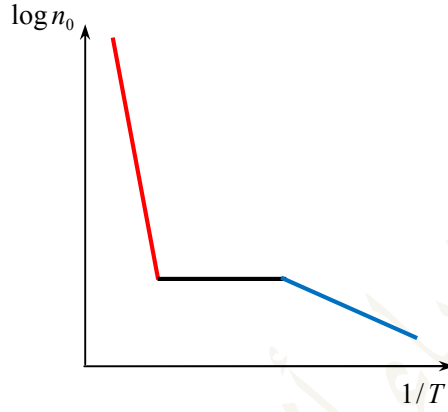
يتحدد بطاقة تأين المانحات،  $\Delta E_d$ ،

→ وفي درجات الحرارة المرتفعة يتحدد ميل المستقيم بعرض المنطقة المحظورة،  $\Delta E_0$ .

→ أمّا القطعة المستقيمة الأفقية فتوافق مجال استنفاد الشوائب.



الشكل (9): عائلة من المنحنيات  $\log n_0 = f(1/T)$  من أجل  $N_d$  من أجل  $N_d$  المعدل درجة التطعيم  $N_d$  المتزايدة بزيادة الرقم المتسلسل



الشكل (8): تابعة لغاريتم تركيز الإلكترونات بمقلوب درجة الحرارة من أجل  $N_d$  مشوب بمانحات.

يوضح الشكل (9) مجموعة منحنيات،  $\log n_0 = f(1/T)$ ، من أجل نصف الناقل المدروس، حيث تكون تراكيز المانحات فيه مختلفة:

ففي درجة حرارة مرتفعة كفاية، يمكن أن نعدّ  $n_0 \gg N_d$ ، أي أن التركيز المشوب لحاملات الشحنة صغير، وعندها يمكن حساب  $n_0$  وفقاً لعلاقة التركيز الذاتي،  $n_i$ ، ثم نحصل على علاقة لمستوى فيرمي،  $E_F$ ، لها شكل العلاقة (13-31).

### كيفية حساب القيمة الحرجة لمستوى فيرمي: مسألة مهمة جداً في أنصاف النواقل

Calculation of extreme Value of Fermi Level

تُلاحظ النهاية القصوى للمنحني  $E_F = f(T)$  في درجات الحرارة المنخفضة عندما تحقق العلاقة (14-13)،  $E_F = \frac{1}{2}(E_c + E_d) + \frac{1}{2}k_B T \ln\left(\frac{1}{2}N_d / N_c\right)$ ، إذ نوجد القيمة العظمى لمستوى فيرمي من خلال إيجاد مشتق  $E_F$  بالنسبة لدرجة الحرارة،  $T$ ، مع الأخذ بالحسبان أنّ  $N_d$  مستقر عن درجة الحرارة، ثم مساواة الناتج بالصفر، وذلك بغرض تعيين شرط النهاية الحدية. إذن،

$$\frac{dE_F}{dT} = \frac{k_B}{2} \ln \frac{N_d}{2N_c} - \frac{k_B T}{2N_c} \cdot \frac{dN_c}{dT} \quad (33-13)$$

ومنه:

$$\ln \frac{N_d}{2N_c} = \frac{T_{\max}}{N_c} \cdot \frac{dN_c}{dT} \quad (34-13)$$

$$\text{وبما أن } N_c = \frac{2(2\pi m_n k_B T)^{3/2}}{h^3} \text{ فإن:}$$

$$\frac{dN_c}{dT} = \frac{3}{2} \frac{N_c}{T} \equiv \frac{3}{2} \frac{N_c}{T_{\max}}. \quad (35-13)$$

(تأكد من ذلك) ومن ثم

$$\ln \frac{N_d}{2N_c} = \frac{3}{2}; \quad (36-13)$$

$$\frac{N_d}{2N_c} = e^{3/2}. \quad (37-13)$$

وحسب العلاقة (37-13)، نجد

$$\frac{N_d h^3}{4(2\pi m_n k_B T_{\max})^{3/2}} = e^{3/2}. \quad (38-13)$$

ونحصل من العلاقة الأخيرة على درجة الحرارة الموافقة للقيمة العظمى لمستوى فيرمي،  $E_F$ :

$$T_{\max} = \frac{h^2}{4^{2/3} (2\pi k_B e)^{3/2}} \frac{N_d^{2/3}}{m_n} = A \frac{N_d^{2/3}}{m_n}. \quad (39-13)$$

حيث  $e$  أساس اللوغاريتم الطبيعي.

ونوجد قيمة  $E_{F\max}$  من العلاقتين (14-13)،  $E_F = \frac{1}{2}(E_c + E_d) + \frac{1}{2} k_B T \ln(\frac{1}{2} N_d / N_c)$ ، و (36-13):

$$E_{F\max} = \frac{E_c + E_d}{2} + \frac{3}{4} k_B T_{\max}. \quad (40-13)$$

وهكذا، نجد أن  $T_{\max}$  تتناسب تناسباً طردياً مع تركيز المانحات  $N_d$  وتناسباً عكسياً مع الكتلة الفعالة لكثافة الحالات،  $m_n$ ؛ وبشكلٍ موافقٍ، نجد أن  $E_{F\max}$  تتعلق أيضاً بهذين الوسيطين اللذين يتصف بهما نصف الناقل المدروس.

14 دراسة مستوى فرمي والتركيز المتوازن لحاملات الشحنة في أنصاف النواقل اللامتحلة والحاوية آخذات:

لدينا من أجل نصف ناقل ثقبى:

$$N_d = 0; \quad N_a \neq 0. \quad (1-14)$$

في درجة الحرارة المنخفضة، تُعدُّ الآلية الرئيسة لتشكيل ثقب، اقتناص إلكترونات على الآخذات، تلك الإلكترونات التي تهيَّجت بالحركة الحرارية من عصابة التكافؤ؛ وعندها تتحقق المتراجحة  $n_0 \ll p_0$ ، ومن ثمَّ يُعبَّر عن شرط الاعتدال الكهربائي بالشكل الآتي:

$$p_0 = n_a. \quad (2-14)$$

ومن ثمَّ:

$$N_v e^{-\frac{E_F - E_v}{k_B T}} = \frac{N_a}{2 e^{\frac{E_a - E_F}{k_B T}} + 1}; \quad (3-14)$$

$$N_v e^{-\frac{E_F - E_v}{k_B T}} \left( 2 e^{\frac{E_a - E_F}{k_B T}} + 1 \right) = N_a;$$

$$2 e^{\frac{2E_F}{k_B T}} e^{\frac{E_a}{k_B T}} e^{\frac{E_v}{k_B T}} + e^{-\frac{E_F}{k_B T}} e^{\frac{E_v}{k_B T}} = \frac{N_a}{N_v};$$

وبفرض  $x = e^{-\frac{E_F}{k_B T}}$  نحصل على معادلة جبرية من الدرجة الثانية نحلها عن طريق المميز بالنسبة لـ  $x$ ، حلها من الشكل الآتي:

$$E_F = E_a - k_B T \ln \left[ \frac{1}{4} \left( \sqrt{1 + \frac{8N_a}{N_v} e^{\frac{\Delta E_a}{k_B T}}} - 1 \right) \right]. \quad (4-14)$$

حيث  $\Delta E_a = E_a - E_v$  طاقة تأين الزرة الآخذة.

تعبّر العلاقة (4-14) عن موضع سوية فيرمي؛ كتابع لدرجة الحرارة من أجل نصف ناقل ثقبى غير متحلل، إلا أنها معقدة لدرجة لا يمكن تحليلها ببساطة، ولهذا السبب، سندرس حالتين حرجتين لهذه التابعة:

أولاً- نُحدِّد درجات الحرارة الأكثر انخفاضاً (المنخفضة جداً) بواسطة المتراجحة

$$\frac{8N_a}{N_v} e^{\frac{\Delta E_a}{k_B T}} \gg 1. \quad (5-14)$$

في هذه الحالة إذا كانت اللامساواة (5-14) محققة، يمكننا إهمال الواحد الواقع تحت الجذر التربيعي في القوسين المتوسطين في العلاقة (4-14)، فنحصل على المساواة الآتية:

$$E_F = \frac{E_a + E_v}{2} - \frac{k_B T}{2} \ln \frac{N_a}{2N_v}. \quad (6-14)$$

يمكن الحصول على شرط النهاية الحديثة لسوية فيرمي،  $E_{F \max}$ ، بإتباع الطريقة ذاتها في الفقرة 13 السابقة.

يمكننا إيجاد تركيز الحاملات الأساسية للشحنة (الثقوب)،  $p_0$ ، من العلاقة (11-37)، حيث نحصل على العلاقة الآتية إذا أخذنا بالحسبان العلاقة (6-14):

$$p_0 = N_v e^{-\frac{E_F - E_v}{k_B T}} = N_v e^{-\frac{\frac{1}{2}(E_a + E_v) - \frac{1}{2}k_B T \ln \frac{N_a}{2N_v} - E_v}{k_B T}}.$$

ومنه:

$$p_0 = N_v e^{-\frac{\frac{1}{2}(E_a - E_v)}{k_B T}} e^{\ln \sqrt{\frac{N_a}{2N_v}}} = \sqrt{\frac{N_v^2 N_a}{2N_v}} e^{-\frac{\Delta E_a}{2k_B T}}$$

$$\therefore p_0 = \sqrt{\frac{N_v N_a}{2}} e^{-\frac{\Delta E_a}{2k_B T}}. \quad (7-14)$$

ثانياً- بتعيين **الحدّ العلوي** لدرجات الحرارة **المنخفضة** وفقاً للشرط

$$\frac{8N_a}{N_v} e^{\frac{\Delta E_a}{k_B T}} \ll 1, \quad (8-14)$$

نجد:

$$E_F = E_a - k_B T \ln \left[ \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{8N_a}{2N_v} e^{\frac{\Delta E_a}{k_B T}} - 1 \right) \right]$$

$$= E_a - k_B T \left( \ln \frac{N_a}{N_v} + \frac{E_a - E_v}{k_B T} \right)$$

$$= E_a - E_a + E_v - k_B T \ln \frac{N_a}{N_v}$$

ومن ثمّ

$$\boxed{E_F = E_v - k_B T \ln \frac{N_a}{N_v}} \quad (9-14)$$

ولحساب تركيز الثقوب في إطار هذا الشرط نبدأ من العلاقة (11-37) الآتية:

$$p_0 = N_v e^{-\frac{E_F - E_v}{k_B T}} = N_v e^{-\frac{1}{k_B T} \left( E_v - k_B T \ln \sqrt{\frac{N_a}{N_v}} - E_v \right)} = N_v e^{\ln \frac{N_a}{N_v}}$$

$$\therefore p_0 = N_a, \quad (10-14)$$

أي نحصل على مجال استنفاد الشوائب.

إن شرط الاعتدال الكهربائي في درجات الحرارة المرتفعة يكون من الشكل الآتي:

$$p_0 = n_0 + N_a. \quad (11-14)$$

يفرض هنا أن  $N_a = N_a^- = n_a$ ، أي تُعد كل الأخذات متأينة.

باستخدام قانون فعل الكتلة نجد:

$$p_0 = \frac{n_i^2}{p_0} + N_a, \quad (12-14)$$

ومنه، نحصل على معادلة جبرية من الدرجة الثانية بالنسبة للتركيز  $p_0$ ، من الشكل

$$p_0^2 = n_i^2 + N_a p_0; \\ p_0^2 - N_a p_0 - n_i^2 = 0. \quad (13-14)$$

وللمعادلة الأخيرة حل من الشكل الآتي:

$$p_0 = \frac{N_a}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4n_i^2}{N_a^2}} \right). \quad (14-14)$$

حيث اخترنا الإشارة موجب فقط للجذر التربيعي، لأن  $p_0 > 0$ .

أضف إلى ذلك، باستخدام العلاقة (11-37)،  $p_0 = N_v e^{-\frac{E_F - E_v}{k_B T}}$ ، أو  $p_0 / N_v = e^{-\frac{E_F - E_v}{k_B T}}$  عن طريق أخذ لغاريتم طرفيها،، نحصل على المساواة الآتية:

$$-\frac{E_F - E_v}{k_B T} = \ln \frac{p_0}{N_v} = \ln \left[ \frac{N_a}{2N_v} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4n_i^2}{N_a^2}} \right) \right]. \quad (15-14)$$

ومنه نحصل على علاقة تعيين مستوى فرمي في درجة الحرارة المرتفعة الآتية:

$$E_F = E_v - k_B T \ln \left[ \frac{N_a}{2N_v} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4n_i^2}{N_a^2}} \right) \right]. \quad (16-14)$$

ندرس هنا حالتين حرجيتين؛ لنفرض في البداية أن:

$$\frac{4n_i^2}{N_a^2} \ll 1. \quad (17-14)$$

توافق هذه المتراجحة مجال درجات الحرارة الوسطية، وبدقة أكثر، مجال استنفاد الشوائب، حيث نحصل من المعادلتين (14-14) و (14-16) على العلاقتين الآتيتين:

$$p_0 = N_a ; \quad E_F = E_v - k_B T \ln \frac{N_a}{N_v}.$$

ومن أجل المتراجحة المعاكسة

$$\frac{4n_i^2}{N_a^2} \gg 1. \quad (18-14)$$

نجد

$$p_0 = n_i \quad \text{و} \quad E_F = E_v - k_B T \ln \frac{n_i}{N_v}. \quad (19-14)$$

وإذا عوضنا هنا عن التركيز الذاتي،  $n_i$ ، بقيمته من العلاقة (12-6)،

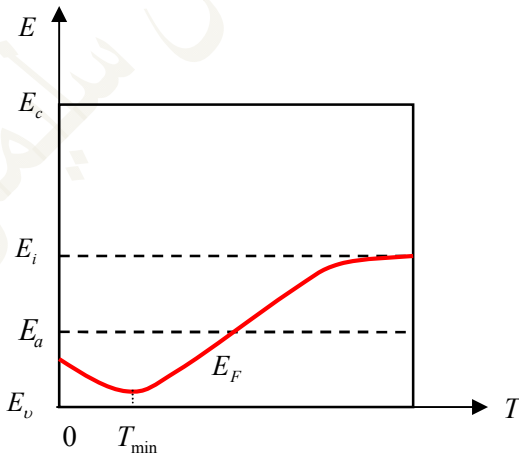
$$n_i = \sqrt{N_c N_v} \exp\left(-\frac{\Delta E}{2k_B T}\right)$$

الآتي:

$$\begin{aligned} E_F &= E_v - k_B T \ln \frac{\sqrt{N_c N_v} e^{-\frac{\Delta E}{2k_B T}}}{N_v} = E_v - k_B T \left( \ln \sqrt{\frac{N_c}{N_v}} + \ln e^{-\frac{E_c - E_v}{2k_B T}} \right) \\ &= E_v - k_B T \ln \sqrt{\frac{N_c}{N_v} + \frac{E_c - E_v}{2}} \end{aligned}$$

ومن ثمَّ

$$E_F = \frac{E_c + E_v}{2} + \frac{k_B T}{2} \ln \frac{N_v}{N_c}. \quad (20-14)$$



الشكل (10): عائلة من المنحنيات

$$\log p_0 = f(1/T)$$

المدرس عند تعديل درجة التطعيم  $N_a$  المتزايدة

بزيادة الرقم المتسلسل

أي أننا حصلنا على علاقة مستوى فيرمي من أجل نصف ناقل ذاتي.

يوضح الشكل (10) التابعة،  $E_F = f(T)$ ، من أجل نصف ناقل غير متحلل يحوي آخذات:

$$E_F = \frac{E_c + E_v}{2}$$

في الدرجة  $T=0$ ، تقول العلاقة (14-20) إلى الشكل الآتي:

ومع ارتفاع درجة الحرارة، ينخفض في البداية مستوى فيرمي بعض الشيء، ويبلغ نهاية دنيا، ثم يرتفع حتى  $E_i$  تماماً (وكأن نصف الناقل أصبح نصف ناقل ذاتي).

يوضح الشكل (11) التابعة،  $\log p_0 = f(1/T)$ ، من أجل نصف الناقل المعطى من أجل تراكيز مختلفة للآخذات: فمن أجل الحاملات غير الأساسية للشحنة (الإلكترونات)، في درجة

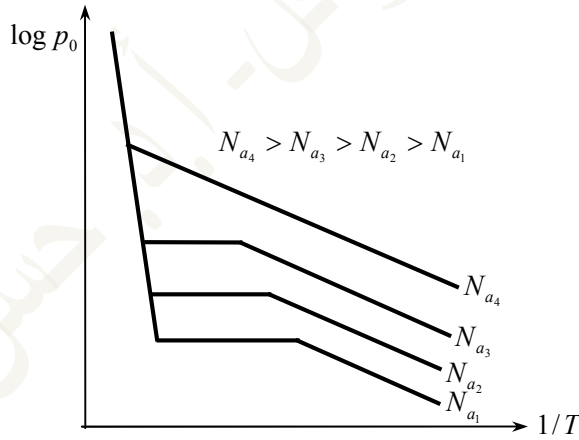
الحرارة المنخفضة؛  $n_0 \ll p_0$  و  $n_0 = \frac{n_i^2}{p_0}$ . وفي درجة الحرارة المرتفعة، يكون لدينا، كما

في حالة نصف ناقل ذاتي، المساواة الآتية:

$$n_i = p_i .$$

ثم إن الثقوب المشوبة، التي تراكيزها لا يمكن أن تتجاوز  $N_a$ ، لا تؤخذ بالحسبان، طالما في

هذه الحالة؛  $N_a \ll p_i$ .



الشكل (11): تابعة سوية فيرمي لدرجة الحرارة من أجل نصف ناقل مشوب بآخذات.

## 15 دراسة مستوى فرمي والتركيز المتوازن لحاملات الشحنة في أنصاف النواقل اللامتحلة والحاوية **مانحات وأخذات:**

سندرس في هذه الفقرة حالة عامة، حيث تتوافر في نصف ناقل **غير متحلل**، مانحات وأخذات بآنٍ معاً:

$$N_a \neq 0; \quad N_d \neq 0. \quad (1-15)$$

- لدى الإلكترونات، في أثناء سعيها لشغل **أدنى** المستويات الطاقية، إمكانية الانتقال من المانحات إلى الأخذات، بحيث **يحدث التأين هنا وهناك**.
- فإذا كانت تراكيزها متساوية

$$N_a = N_d \quad (2-15)$$

فإن الشوائب تُعدّل بعضها بعضاً، ويُصبح نصف الناقل **المعدّل Compensated** مشابهاً لنصف الناقل الذاتي، على الرغم من وجود **الشحنات المقيدة Bonded** على المانحات والأخذات.

تكون مستويات الأخذات قريبةً من سقف عصابة التكافؤ عادةً، بحيث **يستوجب قذف** الإلكترونات من **الأخذات** إلى عصابة الناقلية **سرف طاقة أقل بقليل** من عرض المنطقة المحظورة، وعملياً، يُعيّن كل من تركيز حاملات الشحنة ومستوى فيرمي في نصف الناقل المعدّل، كما يُعيّنان في نصف ناقل ذاتي.

**فإذا فرضنا:**

$$N_d > N_a, \quad (3-15)$$

فنحصل على نصف ناقل **معدّل جزئياً**؛ وكأنه يحوي **المانحات** فقط بتركيزٍ فعّالٍ يساوي

$$N'_d = N_d - N_a. \quad (4-15)$$

**أمّا عندما تحقق المتراجحة الآتية** في نصف الناقل:

$$N_d < N_a, \quad (5-15)$$

فنحصل على نصف ناقل **معدّل جزئياً**؛ وكأنه يحوي **الأخذات** فقط بتركيزٍ فعّالٍ يساوي

$$N'_a = N_a - N_d. \quad (6-15)$$

**حساب مستوى فيرمي والتركيز المتوازن** لحاملات الشحنة من أجل نصف ناقل فيه تركيز

**المانحات أعلى** من تركيز الأخذات عند درجة حرارة قريبة من **الصفر المطلق:**

نفرض أن درجة حرارة نصف الناقل قريبة من درجة الصفر المطلق، مما يسمح لنا بكتابة المساواة الآتية:

$$p_0 = n_0 = 0. \quad (7-15)$$

وفي هذه الحالة، تنتقل الإلكترونات من المانحات إلى الأخذات، فتتشغل كل الثقوب المعتدلة بشكلٍ كاملٍ (أي أن  $p_a = 0$ ). وضمن هذه الشروط يكون شرط الاعتدال الكهربائي من الشكل:

$$p_d = n_a. \quad (8-15)$$

أو الشكل:

$$N_d - n_d = N_a - p_a. \quad (9-15)$$

ولكن إذا ما تذكرنا أن  $p_a = 0$ ، تقول المعادلة الأخيرة إلى الشكل الآتي:

$$n_d = N_d - N_a = N'_d. \quad (10-15)$$

وحسب العلاقة (8-10) لدينا:

$$n_d = \frac{N_d}{\frac{1}{2} e^{\frac{E_d - E_F}{k_B T}} + 1}.$$

هذا يعني، أننا نحصل بدلاً من العلاقة (10-15) على العلاقة الآتية:

$$\frac{N_d}{\frac{1}{2} e^{\frac{E_d - E_F}{k_B T}} + 1} = N'_d. \quad (11-15)$$

ومن هذه العلاقة، يمكننا تعيين مستوى فيرمي،  $E_F$ ، حيث نجد:

$$\frac{N_d}{N'_d} = \frac{1}{2} e^{\frac{E_d - E_F}{k_B T}} + 1$$

ومن ثمَّ

$$\frac{1}{2} e^{\frac{E_d - E_F}{k_B T}} = \frac{N_d}{N'_d} - 1. \quad (12-15)$$

وبإجراء التحويلات البسيطة الآتية نجد:

$$e^{\frac{E_d - E_F}{k_B T}} = 2 \left( \frac{N_d}{N'_d} - 1 \right)$$

$$\frac{E_d - E_F}{k_B T} = \ln 2 \left( \frac{N_d}{N'_d} - 1 \right)$$

$$\frac{E_d - E_F}{k_B T} = \ln 2 \left( \frac{N_d - N_d + N_a}{N_d - N_a} \right) = \ln \left( \frac{2N_a}{N_d - N_a} \right) = \ln \frac{2N_a}{N'_d};$$

$$-\frac{E_d - E_F}{k_B T} = -\ln \frac{2N_a}{N'_d} = \ln \left( \frac{2N_a}{N'_d} \right)^{-1} = \ln \frac{N'_d}{2N_a}.$$

$$-E_d + E_F = k_B T \ln \frac{N'_d}{2N_a}.$$

ومن ثمَّ

$$E_F = E_d + k_B T \ln \frac{N'_d}{2N_a}. \quad (13-15)$$

يجدر بالذكر أن علاقة **مستوى** فيرمي من أجل نصف ناقل إلكتروني في درجات الحرارة المنخفضة **يأخذ الشكل الآتي**:

$$E_F = \frac{E_c + E_d}{2} + \frac{k_B T}{2} \ln \frac{N_d}{2N_c}.$$

وبالتعويض عن **العلاقة (13-15)** في العلاقة العامة (16-11)،

نحصل على قيمة طاقة فيرمي،  $E_F$ ، مع الأخذ بالحسبان العلاقة (15-13)،

$$n_0 = \sqrt{\frac{N_c N_d}{2}} e^{-\frac{\Delta E_d}{2k_B T}} \text{، حيث نجد:}$$

$$n_0 = N_c \frac{N'_d}{2N_a} e^{-\frac{\Delta E_d}{k_B T}}. \quad (14-15)$$

يمكن تعيين تركيز الثقوب على أساس **قانون فعل الكتل**، أي من العلاقة:

$$p_0 = \frac{n_i^2}{n_0}.$$

فمن أجل نصف ناقل إلكتروني

$$n_0 = \sqrt{\frac{N_c N_d}{2}} e^{-\frac{\Delta E_d}{2k_B T}}.$$

إذن، في الحالة الراهنة، قيمتا مستوى فيرمي،  $E_F$ ، والتركيز المتوازن للإلكترونات،  $n_0$ ،

تختلفان عن قيمتهما من أجل نصف الناقل الإلكتروني الواقع في درجة حرارة قريبة من درجة

الصفر المطلق،  $T \rightarrow 0$ .

فحسب العلاقة (14-15)، لدينا  $E_F = E_d$ ، عندما  $T = 0$ ، ويحوي الأس في التابع الأسّي المقدار  $k_B T$  عوضاً عن  $2k_B T$ . وبشكلٍ مشابهٍ، يمكننا إجراء الحسابات، من أجل الحالة الموافقة لكون  $N_a > N_d$ : فبدلاً من العلاقتين (6-14) و (7-14)، نحصل من أجل نصف ناقل يحوي آخذات فقط على العلاقتين الآتيتين:

$$E_F = E_d - k_B T \ln \frac{N'_a}{2N_d}; \quad (15-15)$$

$$p_0 = N_v \frac{N'_a}{2N_d} e^{-\frac{\Delta E_a}{k_B T}}. \quad (16-15)$$

ويمكن تعيين تركيز الإلكترونات على أساس **قانون فعل الكتلة**.

دراسة مستوى فرمي والتركيز المتوازن لحاملات الشحنة في درجات الحرارة المنخفضة **ولكن البعيدة عن درجة الصفر المطلق**:

عند رفع درجة الحرارة في نصف الناقل، الذي يتصف بالمتراجحة  $N_d > N_a$ ، تظهر إلكترونات الناقلية بكميات كبيرة نسبياً، إلى درجة يدخل عندها التركيز المتوازن للإلكترونات،  $n_0$ ، في شرط الاعتدال الكهربائي؛ ولذلك، يكون لدينا عوضاً عن العلاقة (8-15)، العلاقة الآتية:

$$p_d = n_a + n_0. \quad (17-15)$$

أو العلاقة:

$$N_d + n_0 = N_d - N_a = N'_d. \quad (18-15)$$

ومنه:

$$n_0 = N'_d - n_d = N_d^{'+}. \quad (19-15)$$

تُحسب الكميّة  $N_d^{'+}$  بشكلٍ مشابهٍ لحساب تركيز الثقوب في المانحات من العلاقة:

$$N_d^{'+} = \frac{N'_d}{2 e^{\frac{E_F - E_d}{k_B T}} + 1}. \quad (20-15)$$

هذا يعني أن الشرط (19-15) مشابه للشرط (2-13)؛ لا بد فقط من استبدال  $N_d$  بـ  $N_d^{'+}$ . يمكن أيضاً، استخدام الحساب الذي أُجري في **الفقرة 13** واستبدال الكميّة  $N_d$  في العلاقة (14-13)، بالكميّة  $N'_d = N_d - N_a$ . إذ نحصل بعد إجراء ما ذُكر على علاقتي فيرمي والتركيز المتوازن للإلكترونات الآتيتين:

$$E_F = \frac{E_c + E_d}{2} + \frac{k_B T}{2} \ln \frac{N'_d}{2N_c}. \quad (21-15)$$

ومن ثم

$$n_0 = \sqrt{\frac{N_c N'_d}{2}} e^{-\frac{\Delta E_d}{2k_B T}}. \quad (22-15)$$

عند تحقق الشرط  $N_a > N_d$ ، نحصل من خلال الطريقة ذاتها المتبعة أعلاه، بدلاً من العلاقتين (6-14) و (7-14)، على العلاقتين الآتيتين، من أجل سوية فيرمي والتركيز المتوازن للتقوب:

$$E_F = \frac{E_a + E_v}{2} - \frac{k_B T}{2} \ln \frac{N'_a}{2N_v}; \quad (23-15)$$

$$p_0 = \sqrt{\frac{N_v N'_a}{2}} e^{-\frac{\Delta E_a}{2k_B T}}. \quad (24-15)$$

وبالتالي،

- في درجات الحرارة المنخفضة، ولكن ليست القريبة من درجة الصفر المطلق، أنصاف النواقل المعدلة جزئياً مُشابهة لأنصاف النواقل الحاوية مانحات أكثر من الآخذات،  $N_d > N_a$ ، وأنصاف النواقل الحاوية آخذات أكثر من المانحات،  $N_a > N_d$ .

→ إذ يساوي التركيز الفعّال للمانحات في الحالة الأولى،  $N'_d = N_d - N_a$ ،

→ ويساوي التركيز الفعّال للآخذات في الحالة الثانية،  $N'_a = N_a - N_d$ .

- وفي درجات الحرارة المرتفعة، كما هي العادة، تشبه أنصاف النواقل المشوية المذكورة أعلاه أنصاف النواقل الذاتية.

بهذه الطريقة، نجد أن منحنيات سوية فيرمي،  $E_F = f(T)$ ، في الحالة الراهنة، من أجل درجات حرارة قريبة من الصفر المطلق،  $T = 0$ ، ستختلف عن تلك المنحنيات التي جرى دراستها في الفقرتين 13 و 14، وفي درجات الحرارة الأكثر ارتفاعاً لن تختلف عنها، الشكل (12).

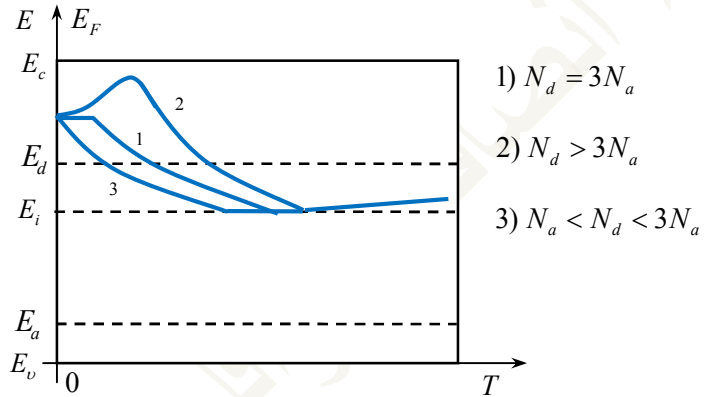
إذ نجد وفقاً للعلاقة (13-15) والشكل (1-15) أنه بجوار  $T = 0$ ،

○ تكون  $E_F = E_d$ ، في الحالة الأولى،

○ و  $E_F > E_d$ ، في الحالة الثانية،

○ و  $E_F < E_d$ ، في الحالة الثالثة.

ولكن طالما أن التطبيق العملي لأنصاف النواقل محدوداً بدرجات الحرارة غير المنخفضة جداً، فإن مسار التتابع  $E_F(T)$ ، و  $n_0(T)$ ، و  $p_0(T)$  في درجات الحرارة القريبة من الصفر تكتسب اهتماماً نظرياً بصورة رئيسة، أي أنه من أجل التطبيقات العملية، من المهم أن تكون أنصاف النواقل المعدلة جزئياً مشابهةً لأنصاف النواقل المشوبة غير المعدلة، وأنصاف النواقل المعدلة تماماً مشابهةً لأنصاف النواقل الذاتية.



الشكل (12): تابعة سوية فيرمي لدرجة الحرارة المطلقة من أجل نصف ناقل مشوب بمناحوات وآخذات:

### 16 دراسة أنصاف النواقل المتحللة: Study of the Degenerate Semiconductors

معظم نبائط أنصاف النواقل التي جرى استخدامها حتى عام 1958م تمّ تنظيفها وتنقيتها مسبقاً وبعد ذلك التاريخ جرى استعمال بلّورات نصف ناقلة طُعّمت بشوائب بشكلٍ خفيفٍ، لم يتجاوز تركيزها  $10^{16} \text{ cm}^{-3}$ ، وهذا ما وافق أنصاف النواقل **اللامتحللة** *Non-degenerate*. وعند تحضير **الديودات النفقية** Tunnel Diodes جرت العودة إلى البلّورات "غير النظيفة"، الحاوية شوائب بتركيز وصل حتى  $10^{20} \text{ cm}^{-3}$ ، مما وافق أنصاف النواقل **المتحللة** Degenerate. وهذه الحالة، لم تقتصر على الديودات النفقية وحسب، بل على بعض الليزرزات، والأجهزة الكهحرارية، ومقاييس الشد والانفعال نصف الناقلة Semiconductor Tensometers، وبعض عناصر الدارات المتكاملة *Integrate Circuits* (IC) أيضاً.

### كيفية إيجاد التركيز الحرج للمانحات Critical Concentration of Donors:

إذا درسنا عملية التحوّل من نصف ناقل لامتحل إلى نصف ناقل متحلل نتيجةً لزيادة مستوى التطعيم في نصف الناقل الذي كان نقياً نسبياً، فيمكننا تعيين ما يسمى التركيز الحرج للشوائب.

نحصل من العلاقتين (13-39) و (13-40)، من أجل نصف ناقل يحوي مانحات **وليس متحللاً**، على قيمتي درجة الحرارة،  $T$ ، ومستوى فيرمي،  $E_F$ ، الموافقتين للنهاية القصوى للمنحنى  $E_F = f(T)$ :

$$E_{F \max} = \frac{E_c + E_d}{2} + \frac{3}{4} k_B T_{\max} \quad \text{و} \quad T_{\max} = A \frac{N_d^{2/3}}{m_n}$$

يوافق التركيز الحرج للمانحات **القيمة**  $N_d = N_d^{cr}$ ، التي يبلغ عندها مستوى فيرمي الأقصى **قاع عصابة الناقلية**، أي الموافق للمساواة  $E_{F \max} = E_c$ . وعندها، يُقال وبشكل صارم، من غير الممكن بعد الآن استخدام العلاقات التي تم الحصول عليها سابقاً، بسبب انهيار معيار **اللاتحلل**،  $E_c - E_F > k_B T$ ، من أجل القيمة الحرجة.

إذن، يمكننا استناداً للتقييم المذكور أعلاه كتابة العلاقة الآتية:

$$E_c \Big|_{E_{F \max} = E_c} = E_c = \frac{E_c + E_d}{2} + \frac{3}{4} k_B A \frac{(N_d^{cr})^{2/3}}{m_n} \quad (1-16)$$

ومنه

$$\frac{E_c - E_d}{2} = \frac{3}{4} k_B A \frac{(N_d^{cr})^{2/3}}{m_n};$$

ومن ثم

$$(N_d^{cr})^{2/3} = \frac{E_c - E_d}{2} \frac{4}{3} \frac{m_n}{k_B A}, \quad (2-16)$$

ومن ثم

$$N_d^{cr} = \left( \frac{2}{3} \frac{m_n}{k_B A} \right)^{3/2} (\Delta E_d)^{3/2}, \quad (3-16)$$

حيث  $\Delta E_d = E_c - E_d$  طاقة تأين الذرة المانحة و  $A$  ثابت تُحسب قيمته العديدية من المساواة الآتية:

$$A = \frac{h^2}{4^{2/3} (2\pi k_B e)^{3/2}},$$

و  $e$  أساس اللوغاريتمات الطبيعية.

إذن، يمكننا بهذا الشكل كتابة العلاقة الآتية:

$$N_d^{cr} = B (m_n \Delta E_d)^{3/2}, \quad (4-16)$$

حيث

$$B = \left( \frac{2}{3k_B A} \right)^{3/2}. \quad (5-16)$$

وبالتالي، وفقاً للعلاقة (4-16)، يتحدد التركيز الحرج للمانحات بالكتلة الفعّالة لكثافة الحالات،  $m_n$ ، وطاقة تأين المانحات،  $\Delta E_d$ .

إذا **وافقت** عتبة التحلل من أجل غاز إلكتروني حر **التركيز المتوازن** للإلكترونات،

$n_0 \approx 2 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ ، فإنه يمكن **تحصيل** القيمة ذاتها للتركيز الحرج للمانحات،  $N_d^{cr}$ ؛ من

أجل  $m_n = 0.3 m$  و  $\Delta E_d = 0.03 \text{ eV}$ ، على سبيل المثال.

يمكن أن يأخذ **التركيز الحرج في المركبات  $\text{A}^{\text{III}}\text{B}^{\text{V}}$**  قيمة أقل بكثير من  $10^{19} \text{ cm}^{-3}$ ؛ فمثلاً،

من أجل InSb تم الحصول على القيمة  $N_d^{cr} \approx 10^{12} \text{ cm}^{-3}$ . وهذا يعني أنه يمكن انتقاء مواد

أكثر صلاحيةً من غيرها، بغرض الحصول على أنصاف نواقل متحللة، من خلال تطعيمها

بالشوائب بكميات ليست كبيرة نسبياً. إن التركيز الحرج، يسمح بتعيين حدّ التحلل، على الرغم

من أن نصف الناقل المعني ليس متحللاً تماماً.

### دراسة نصف الناقل الإلكتروني المتحلل:

#### Study of the Degenerate Electron Semiconductor

يُعرّف نصف الناقل **المتحلل**؛ بأنه نصف ناقلٍ، لا يتعلق تركيز حاملات الحرة فيه بدرجة الحرارة؛ وتدل الدراسة التفصيلية، في هذا الإطار، إلى أن نصف الناقل يبدو متحلاً، إذا تحققت المتراحة

$$E_F - E_c > 5 k_B T \quad (6-16)$$

وبالتالي، يكمن **معيار التحلل** في أن مستوى فيرمي في نصف الناقل الإلكتروني يجب أن يتوضع **فوق** قاع عصابة الناقلية ( $E_F > E_c$ ) **ليس بأقل** من  $5 k_B T$ . وفي هذه الحالة، يمكن كتابة المعيار الآتي:

$$\xi = \frac{E_F - E_c}{k_B T} > 5. \quad (7-16)$$

وعندها، يُكتب تكامل فيرمي من الدرجة  $\frac{1}{2}$ ، **العلاقة** (11-11)، بالشكل الآتي:

$$\Phi_{1/2}(\xi) = \frac{2}{3} \xi^{3/2}. \quad (8-16)$$

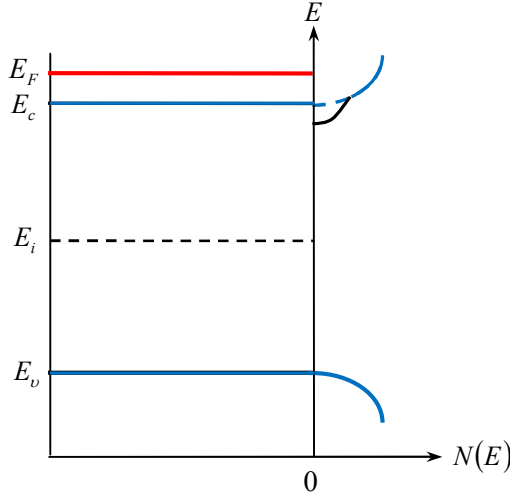
ومن ثم، تأخذ علاقة تركيز إلكترونات الناقلية، **العلاقة** (12-11)، الشكل:

$$n_0 = \frac{8\pi (2m_n)^{3/2}}{3h^3} (E_F - E_c)^{3/2}. \quad (9-16)$$

وهكذا، نجد أن تركيز الغاز الإلكتروني المتحلل في أنصاف النواقل، لا يتعلق بدرجة الحرارة

ويتعيّن بالعلاقة (9-16)، أي أنه يبدو متناسباً مع الكمية  $[m_n (E_F - E_c)]^{3/2}$ .

تجدر الإشارة إلى أنّ **تركيزاً كبيراً للمانحات** يؤدي إلى تأثرها (تفاعلها مع بعضها البعض)، أي إلى **تداخل التوابع الموجية** لمراكز الإشابة المتجاورة، بحيث يمكن أن تنشأ عصابة طاقة مشوبة *Impurity Zone* في المنطقة المحظورة بالقرب من قاع عصابة الناقلية. تتوزع المستويات المنفصلة لهذه العصابة الطاقية قريبة جداً من بعضها البعض، بحيث تُعدّ العصابة المشوبة وكأنها امتداداً لعصابة الناقلية.



الشكل (13): مخطط عصابات الطاقة وكثافة الحالات في نصف ناقل إلكتروني متحلل

يوضح الشكل (13) مخططاً للعصابات الطاقية وتمثيلاً لكثافة الحالات في نصف ناقل إلكتروني متحلل: يتوضع مستوى فيرمي فوق قاع عصابة الناقلية على بعد طاقى ليس بأقل من  $5k_B T$ ، ويظهر عند في كثافة الحالات،  $N(E)$ ، "ذيل" Tail يمتد إلى المنطقة المحظورة. يُشير الخط المتقطع إلى مسار كثافة الحالات،  $N(E)$ ، في نصف ناقل متبلور غير متحلل.

دراسة نصف الناقل الثقبى المتحلل Study of the Degenerate Hole Semiconductor

يُقال عن نصف ناقل ثقبى بأنه متحلل، إذا حقق المعيار (الشرط) الآتي:

$$E_v - E_F > 5k_B T. \quad (10-16)$$

وبالتالي، في هذه الحالة، يجب أن يتوضع مستوى فرمي تحت سقف عصابة التكافؤ، ليس بأقل من  $5k_B T$ .

يتعين التركيز الحرج للأخذات بشكلٍ مشابهٍ لتعيين التركيز الحرج للمانحات، حيث يتم استبدال قاع عصابة الناقلية، بسقف عصابة التكافؤ فقط. يتم الحصول على نصف ناقل ثقبى متحلل عند تطعيمه بشوائبٍ من الأخذات بكميات كبيرة نسبياً.

يُعطي الشرط (10-16) المعيار الآتي:

$$\eta = \frac{E_v - E_F}{k_B T} > 5. \quad (11-16)$$

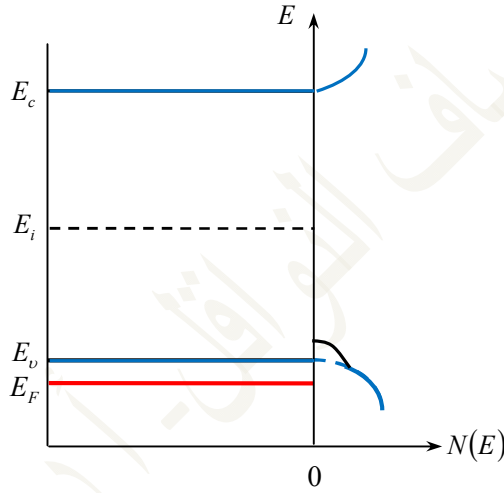
وعندها، يُكتب تكامل فرمي من الدرجة  $\frac{1}{2}$ ، العلاقة (11-32)، بالشكل الآتي:

$$\Phi_{1/2}(\eta) = \frac{2}{3} \eta^{3/2}. \quad (12-16)$$

ومن ثم، تأخذ علاقة تركيز ثغوب الناقلية، العلاقة (30-11)، الشكل:

$$p_0 = \frac{8\pi}{3h^3} (2m_p)^{3/2} (E_v - E_F)^{3/2}. \quad (13-16)$$

وفي هذه الحالة، يمكن أن ينشأ فوق سقف عصابة التكافؤ، عصابة طاقة مشوبة و"ذيل" لكثافة الحالات يمتد إلى المنطقة المحظورة أيضاً، كما يوضح الشكل (14).



الشكل (14): مخطط عصابات الطاقة وكثافة الحالات في نصف ناقل ثغبي متحلل