كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثالثة**

المادة : فيزياء احصائية

المحاضرة: الرابعة/نظري/ د.علي اسد

الفصل الرابع

إحصاء مكسويل – بولتزمان

يدرس إحصاء مكسويل - بولتزمان توزع الجسيمات الكلاسيكية المتمايزة. وهي جسيمات متطابقة الخواص وغير متفاعلة مع بعضها البعض، ولاينطبق عليها مبدأ الاستبعاد لـ باولي (جسيمات لا كمية). ويطبق على الغازات المثالية، وعلى تفاعلات الإشعاع مع المادة. كما يدرس إصدار الليزر.

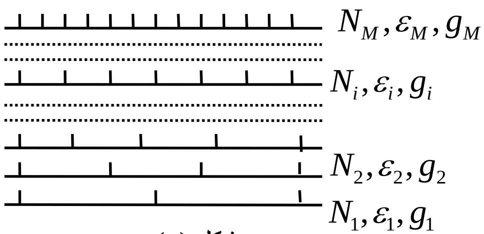
ندرس فيما يلي إحصاء مكسويل - بولتزمان على الجمل الترموديناميكية المعزولة.

<u>عبارة الوزن الإحصائي لتوزع مكسويل – بولتزمان:</u> W_{M-B}

نفرض جملة معزولة مكونة من N جسيم متمايز، موزعة على ε_i سوية طاقة متحللة، ودرجة تحلل كلٍ منها g_i.

تحوي السوية الواحدة على N_i جسيم (ندعوه رقم انشغال السوية). كما هو موضح بالشكل ( ).

يجري التوزع بحيث يتحقق قانوني انحفاظ عدد الجسيمات $N=\sum_i N_i$ وطاقتها $U=\sum_i N_i\,\varepsilon_i$



شكل ( )

بتطبيق قواعد العد:

يعطى عدد الحالات <u>الميكروية</u> الإجمالي w، الناتج عن <u>التوزع المسبق</u> لـ N جسيم <u>متمايز</u> على M سوية (الموافق للحالة الماكروية): $(N_1,N_2,\dots\dots,N_i,\dots\dots,N_M)$ بالعلاقة:

$$w=\frac{N!}{\prod_{i=1}^{M}N_i!}$$

وبما أن السويات متحللة لطبقات (خلايا).

فمن أجل السوية i، يعطى عدد حالات <u>التوزع الميكروية</u> w'، الناتج عن توزع N_i جسيم <u>متمايز</u> على g_i خلية بالعلاقة: $w'=g_i^{\,N_i}$.

ومن أجل كافة السويات $i\in[1,2,\dots\dots M]$ يصبح عدد حالات <u>التوزع الميكروية</u> w'' بالشكل:

$$w''=\prod_{i=1}^{M}g_i^{\,N_i}$$

فيكون العدد الإجمالي لحالات التوزع الميكروية (الوزن الإحصائي W) الموافق للحالة الماكروية - مسبقة التوزع - $(N_1,N_2,\dots\dots,N_i,\dots\dots,N_M)$ بالشكل التالي:

$$W_{M-B}=w\,w''=\frac{N!}{\prod_{i=1}^{M}N_i!}\prod_{i=1}^{M}g_i^{\,N_i}\;\Rightarrow\;\boxed{W_{M-B}=N!\prod_{i=1}^{M}\frac{g_i^{\,N_i}}{N_i!}}$$

من الواضح أن الوزن الإحصائي W مقدار عديم البعد لأنه يعبر عن عدد.

<u>حالة التوازن:</u> هي الحالة الماكروية الموافقة لوزن إحصائي أعظمي $W_{M-B\,\max}$.

<u>مثال:</u> جملة معزولة، مكونة من جسيمين متمايزين A و B. موزعين على سويتين للطاقة $\varepsilon_1=\varepsilon_o$ و $\varepsilon_2=2\varepsilon_o$، متحللتين بالشكل: $g_1=g(\varepsilon_i)=1$ و $g_2=g(\varepsilon_2)=2$. والمطلوب:

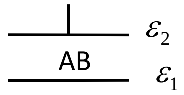
1- أوجد حالات التوزع الماكروي الإجمالي، وطاقة كلٍ منها.
2- أوجد الوزن الإحصائي لكل حالة ماكروية (مع التمثيل). واستنتج حالة التوازن.

الحل: 1- عدد الحالات الماكروية الإجمالي: $N_o=\dfrac{(N+N_\varepsilon-1)!}{N!(N_\varepsilon-1)!}=\dfrac{(2+2-1)!}{2!(2-1)!}=\dfrac{3!}{2!\,1!}=3$

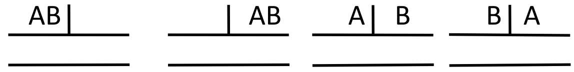
حالات التوزع الماكروي الإجمالي $\left\{(\overbrace{2,0}^{U=2\varepsilon_o})(\overbrace{0,2}^{U=4\varepsilon_o})(\overbrace{1,1}^{U=3\varepsilon_o})\right\}$

2- الأوزان الإحصائية للحالات الماكروية (مع التمثيل). بتطبيق W_{M-B}

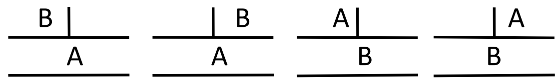
$$W_{(2,0)}=N!\prod_{i=1}^{M}\frac{g_i^{N_i}}{N_i!}=2!\left(\frac{1^2}{2!}\;\frac{2^0}{0!}\right)=1 \quad \Leftrightarrow$$



$$W_{(0,2)}=N!\prod_{i=1}^{M}\frac{g_i^{N_i}}{N_i!}=2!\left(\frac{1^0}{0!}\;\frac{2^2}{2!}\right)=4 \quad \Leftrightarrow$$



$$W_{(1,1)}=N!\prod_{i=1}^{M}\frac{g_i^{N_i}}{N_i!}=2!\left(\frac{1^1}{1!}\;\frac{2^1}{1!}\right)=4 \quad \Leftrightarrow$$



بما أن الوزن الإحصائي الأعظمي $W_{\max}=4$ يوافق الحالتين الماكرويتين $(0,2)$ و $(1,1)$، فتكون حالة التوازن هي الحالة الموافقة لأقلهما طاقة، أي الحالة الماكروية $(1,1)$.

لأن $U_{(1,1)}=\varepsilon_o+2\varepsilon_o=3\varepsilon_o$ في حين $U_{(0,2)}=0+4\varepsilon_o=4\varepsilon_o$

<u>تمرين نموذجي:</u>

يوزع 5 كتب مختلفة (A,B,C,D,E) "جسيمات متمايزة " على رفين في مكتبة "مستويي طاقة $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ "

فإذا علمت أن الرف الأول مقسم لثلاث حجرات والثاني لحجرتين " درجات التحلل $g_1=3$ و $g_2=2$ ".

وأن الطاقة التي يبذلها الشخص لوضع كتاب في الرف الأول $\varepsilon_1=\varepsilon_o$ وفي الرف الثاني $\varepsilon_2=2\varepsilon_o$.

المطلوب: 1- أوجد حالات التوزع الماكروي وطاقة كل منها.

2- أوجد الأوزان الإحصائية للحالات الماكروية بتطبيق W_{M-B}.

ثم استخدم قواعد العد في التأكد من:

- صحة العدد الإجمالي للحالات الميكروية (بصرف النظر عن تواجد الرفوف).
- من صحة الوزن الإحصائي لإحدى الحالات الماكروية.

3- هل تختلف حالة التوزع الأكثر احتمالاً (عند مراعاة التصنيف - أثناء التوزيع - من عدمه).

الحل: 1- عدد الحالات الماكروية الإجمالي: $N_o=\dfrac{(N+N_\varepsilon-1)!}{N!(N_\varepsilon-1)!}=\dfrac{(5+2-1)!}{5!(2-1)!}=\dfrac{6!}{5!1!}=6$

إجمالي الحالات الماكروية وطاقاتها $\left\{(\overbrace{5,0}^{U=5\varepsilon_o})(\overbrace{0,5}^{U=10\varepsilon_o})(\overbrace{4,1}^{U=6\varepsilon_o})(\overbrace{1,4}^{U=9\varepsilon_o})(\overbrace{3,2}^{U=7\varepsilon_o})(\overbrace{2,3}^{U=8\varepsilon_o})\right\}$

2- نوجد الأوزان الإحصائية للحالات الماكروية بتطبيق W_{M-B} بالشكل $W_{(N_1,N_2)}=N!\prod_{i=1}^{M}\frac{g_i^{N_i}}{N_i!}$،

$$W_{(5,0)}=243\;,\;W_{(0,5)}=32\;,\;W_{(4,1)}=810\;,\;W_{(1,4)}=240\;,\;W_{(3,2)}=1080\;,\;W_{(2,3)}=720$$

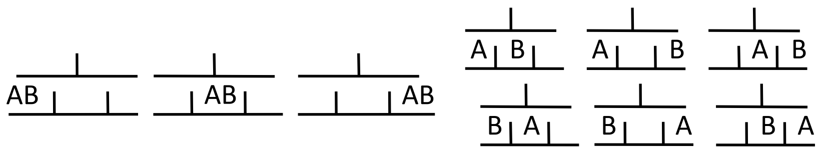
- عند صرف النظر عن تواجد الرفوف، يكون لدينا 5 كتب موزعة على 5 حجرات $N_g=5$، ويصبح العدد الإجمالي للحالات الميكروية (بتطبيق قواعد العد) $W=(N_g)^N=5^5=3125$ (الذي يساوي مجموع أوزان الحالات الماكروية السابقة)
- نتأكد من صحة نتيجة الحالة الماكروية $W_{(2,3)}=720$ (بتطبيق قواعد العد):

بدايةً. نحسب عدد طرق اختيار كتابين من خمسة كتب لوضعها في الرف الأول باستخدام عبارة التوافيق كما يلي:

$$w_1=\binom{5}{2}=\frac{5\,!}{2\,!\,(5-2)\,!}=10 \Leftrightarrow \{AB,AC,AD,AE,BC,BD,BE,CD,CE,DE\}$$

ثم نحسب عدد طرق توزيع مجموعة الكتابين AB (على سبيل المثال) على الحجرات الثلاث $N_g=3$ في الرف الأول

بتطبيق العلاقة التالية: $w_1'=(N_g)^N=3^2=9$



وهكذا يكون الأمر بالنسبة لمجموعات الكتب الأخرى AC و AD و....... (مأخوذة مثنى مثنى).
فيكون عدد الطرق الإجمالي لاختيار وتوزيع كتابين كتابين على حجرات الرف الأول

$$W_1 = w_1\, w_1' = 10 \times 9 = 90$$

أما بالنسبة للكتب الثلاثة المتبقية فتؤخذ دفعة واحدة لأن

$$w_2 = \binom{3}{3} = \frac{3\,!}{3\,!\,(3-3)\,!} = 1$$

وحيث أنها توزع على حجرتين فقط $N_g = 2$ (في الرف الثاني). فيكون عدد طرق التوزيع $w_2' = (N_g)^N = 2^3 = 8$
فيكون عدد الطرق الإجمالي لاختيار وتوزيع الكتب الثلاثة المتبقية على حجرتي الرف الثاني

$$W_2 = w_2\, w_2' = 1 \times 8 = 8$$

فيكون عدد الطرق الإجمالي لاختيار وتوزيع الكتب الخمسة على الرفوف والحجرات.

$$W = W_1 \times W_2 = 90 \times 8 = 720$$

3- عند عدم مراعاة التصنيف: فإن الشخص المكلف بالتوزيع ميّال لبذل أقل طاقة ممكنة لإنجاز المهمة. ونحصل على على حالة التوزع $(5,0)$ باعتبارها الحالة الأقل طاقة.
وعند مراعاة التصنيف: فإن الشخص المكلف بالتوزيع سيضع كل كتاب من الكتب الخمسة المختلفة (المتمايزة) في حجرة منفصلة (كما هو الحال عند أرشفة الكتب في المكتبات). وعليه ستكون حالة التوزع $(3,2)$ هي الحالة الأكثر احتمالاً.

معادلة لاغرانج: (لاستنتاج المعادلة راجع الملحق)
استفاد لاغرانج من المواصفات التالية للجملة الترموديناميكية المعزولة، الواقعة في حالة توازن:
$(S_{\max} = cte\,,\; N = cte\;,\; U = cte)$. فقام بصياغتها على شكل مضاريب C_1 و C_1 كما يلي:

$$S_{\max} + C_1\, N + C_2\, U = cte$$

وبالتعويض عن $S_{\max}$ بقيمتها من قانون بولتزمان: $S_{\max} = K\, LnW_{\max}$ والقسمة على ثابتة بولتزمان K نجد:

$$LnW_{\max} + \frac{C_1}{K}N + \frac{C_2}{K}U = \frac{cte}{K} = cte'$$

نعرف مضاريب لاغرانج α و β بالشكل التالي: $\beta = C_2/K$ ℘ $\alpha = C_1/K$ وبالتعويض، نجد:

$$LnW_{\max} + \alpha\, N + \beta U = cte'$$

وبمفاضلة طرفي العلاقة نحصل على معادلة لاغرانج للجملة المتوازنة (الموافقة للحالة الأكثر احتمال) التالية:

$$\boxed{dLnW_{\max} + \alpha\, dN + \beta\, dU = 0}$$

ملاحظة: بما أن حدود هذه المعادلة تعبر عن أعداد (عديمة البعد). نجد أن المضروب α يكون عديم البعد في حين تكون وحدة قياس المضروب $[\beta] = J^{-1}$ (مقلوب طاقة).

عبارة أرقام انشغال السويات المنفصلة في الحالة المتوازنة (توزع مكسويل - بولتزمان في الحالة الأكثر احتمالاً):

ننطلق من عبارة الوزن الإحصائي لتوزع (M-B). المعطاة بالعلاقة: $W_{M-B} = N!\prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i\,!}$

نوجد بدايةً $Ln(W_{M-B})$، ثم نوجد تفاضله $d\,Ln(W_{M-B})$، الذي نعوضه في عبارة شرط الحالة الأكثر احتمالاً التالي:

$$dLn(W_{M-B}) + \alpha\, dN + \beta\, dU = 0 \qquad (1)$$

$$Ln(W_{M-B}) = Ln\,N! + \sum_i \left[N_i\, Ln\, g_i - Ln\, N_i\,!\right]$$

وبما أن الجسيمات كلاسيكية نستخدم تقريب ستيرلنغ $Ln x! \approx x Ln x - x$ نجد:

$$Ln(W_{M-B}) \approx N\,Ln N - N + \sum_i (N_i\, Ln g_i - N_i\, Ln N_i + N_i)$$

بما أن W_{M-B} تابع لكلٍ من N_i و g_i وحيث أننا نبحث عن عدد الجسيمات N_i الموزعة على السوية i التي درجة تحللها g_i ثابتة. فإننا نجد بمفاضلة الطرفين:

$$dLn(W_{M-B}) = \frac{\partial Ln(W_{M-B})}{\partial N_i} dN_i \approx \frac{\partial}{\partial N_i}\left[N\,Ln N - N + \sum_i (N_i\, Ln g_i - N_i\, Ln N_i + N_i) \right] dN_i$$

$$\approx 0 - 0 + \sum_i (Ln g_i - Ln N_i - 1 + 1)\, dN_i = \sum_i Ln \frac{g_i}{N_i} dN_i \qquad (*)$$

بالتعويض في (1) مع الأخذ بعين الاعتبار شرطي انحفاظ عدد الجسيمات و الطاقة التاليين:

$$U = \sum_i \varepsilon_i N_i \;\Rightarrow\; dU = \sum_i \varepsilon_i\, dN_i \qquad \text{و} \qquad N = \sum_i N_i \;\Rightarrow\; dN = \sum_i dN_i$$

فنحصل على رقم الانشغال في الحالة الأكثر احتمالاً:

$$\sum_i Ln \frac{g_i}{N_i} dN_i + \alpha \sum_i dN_i + \beta \sum_i \varepsilon_i\, dN_i = 0$$

وبالإصلاح:

$$\sum_i \left(Ln \frac{g_i}{N_i} + \alpha + \beta \varepsilon_i\right) dN_i = 0 \;\Rightarrow\; Ln \frac{g_i}{N_i} = -(\alpha + \beta \varepsilon_i) \;\Rightarrow\; \frac{g_i}{N_i} = e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}$$

$$\boxed{N_{i(M-B)} = g_i\, e^{\alpha+\beta\varepsilon_i}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{N_{i(M-B)} = e^{\alpha}\, g_i\, e^{\beta\varepsilon_i}}$$

تعبر هذه العلاقة عن أرقام انشغال السويات ε_i في الحالة المتوازنة للجملة (حالة التوزع الأكثر احتمالاً W_{max}).

أي تعطينا أعداد الجسيمات المتمايزة (الكلاسيكية)، في كل سوية من سويات الطاقة المنفصلة ε_i.

<u>ملاحظة:</u> انطلاقاً من محدودية عدد الجسيمات وطاقتها، يجب أن ينسجم توزع (M-B) في الحالة الأكثر احتمالاً (رقم الانشغال) $N_i = e^{\alpha} g_i e^{\beta\varepsilon_i}$ مع توزع غوص الطبيعي،

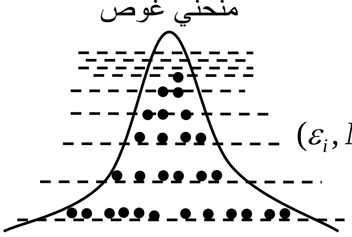
أي يجب أن يؤول عدد الجسيمات ذات الطاقات اللامتناهية (الواقعة في السويات المتراصة) للصفر $N_i(\varepsilon_i \to \infty) \to 0$،

كما هو موضح بالشكل ( ).

وهذا لا يتحقق إلا إذا كانت قيمة المضروب $\beta < 0$ (سالبة).

وسنجد لاحقاً أن قيمة β بدلالة متحولات الجملة هي: $\boxed{\beta = -1/KT}$

أما قيمة المضروب α (عديم البُعد). فسنجدها بدلالة متحولات الجملة لاحقاً.



شكل ( )

<u>مثال:</u> جملة معزولة، مكونة من N جسيم متمايز. توزع على ثلاث سويات للطاقة

$$\varepsilon_3 = 2KT \;\; (J) \;\; \text{و} \;\; \varepsilon_2 = KT \;\; (J) \;\; \text{و} \;\; \varepsilon_1 = 0 \;\; (J)$$

وهي متحللة بالشكل: $g_1 = 1$ و $g_2 = 3$ و $g_3 = 5$. والمطلوب:

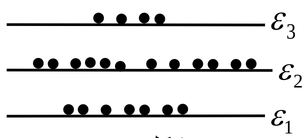
احسب نسب أرقام انشغال السويات في حالة التوازن عند الدرجة T. (علماً أن $e \approx 2{,}718$)

الحل: نكتب نسبة رقمي انشغال سويتين i و j بالشكل:

$$\frac{N_i}{N_j} = \frac{e^{\alpha}\, g_i\, e^{\beta\varepsilon_i}}{e^{\alpha}\, g_j\, e^{\beta\varepsilon_j}} = \frac{g_i\, e^{-\varepsilon_i/KT}}{g_j\, e^{-\varepsilon_j/KT}}$$

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{3e^{-KT/KT}}{1e^{-0/KT}} = \frac{3}{e} > 1 \quad \Rightarrow \quad N_2 > N_1$$

$$\frac{N_2}{N_3} = \frac{3e^{-KT/KT}}{5e^{-2KT/KT}} = \frac{3}{5} e > 1 \quad \Rightarrow \quad N_2 > N_3$$



شكل ( )

$$\frac{N_1}{N_3}=\frac{1e^{-0/KT}}{5e^{-2KT/KT}}=\frac{1}{5}e^{2}>1 \quad \Rightarrow \quad N_1>N_3$$

نستنتج أن أرقام انشغال السويات مرتبة بالشكل التالي: $N_2>N_1>N_3$.

والشكل ( ) يوضح توزع الجسيمات على السويات بغض النظر عن تمايزها، وعن درجات تحللها.
يبدو هذا التوزع مخالف للتوزع الطبيعي.

مثال: جملة معزولة، مكونة من N جسيم متمايز (A,B,C,D,E,......). توزع على ثلاث سويات للطاقة
$\varepsilon_3=2KT\ \ (J)$ و $\varepsilon_2=KT\ \ (J)$ و $\varepsilon_1=0\ \ (J)$

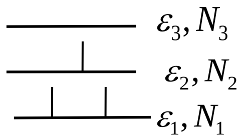
وهي متحللة بالشكل: $g_1=3$ و $g_2=2$ و $g_3=1$. والمطلوب:

- احسب نسب أرقام انشغال السويات في حالة التوازن عند الدرجة T، ورتبها. (علماً أن $e\approx 2,718$).
- احسب الأوزان الإحصائية من أجل $N=3$ و $N=4$ و $N=5$.

الحل: نكتب نسبة رقمي انشغال سويتين i و j بالشكل:

$$\frac{N_i}{N_j}=\frac{e^{\alpha}g_i e^{\beta\varepsilon_i}}{e^{\alpha}g_j e^{\beta\varepsilon_j}}=\frac{g_i e^{-\varepsilon_i/KT}}{g_j e^{-\varepsilon_j/KT}}$$

$$\frac{N_1}{N_2}=\frac{3e^{-\frac{0}{KT}}}{2e^{-\frac{KT}{KT}}}=\frac{3}{2e^{-1}}=\frac{3}{2}e>1 \quad \Rightarrow \quad N_1>N_2$$



شكل ( )

$$\frac{N_1}{N_3}=\frac{3e^{-\frac{0}{KT}}}{1e^{-\frac{2KT}{KT}}}=\frac{3}{1e^{-2}}=3e^{2}>1 \quad \Rightarrow \quad N_1>N_3$$

$$\frac{N_2}{N_3}=\frac{2e^{-\frac{KT}{KT}}}{1e^{-\frac{2KT}{KT}}}=\frac{2e^{-1}}{1e^{-2}}=2e>1 \quad \Rightarrow \quad N_2>N_3$$

نستنتج أن أرقام انشغال السويات (N_1,N_2,N_3) مرتبة بالشكل التالي: $N_1>N_2>N_3$ (شرط التوزع).

من الواضح أن هذا التوزع هو توزع طبيعي كما هو موضح بالشكل ( ).

- الحالات الماكروية الممكنة (المحققة للتوزع الطبيعي) من أجل $N=3$ هي الحالة الوحيدة التالية: (2,1,0)

عدد حالات التوزع الميكروي (الوزن الإحصائي) $W_{(2,1,0)}=N!\prod_{i=1}^{M}\frac{g_i^{N_i}}{N_i!}=3!(\frac{3^2}{2!}\ \frac{2^1}{1!}\ \frac{1^0}{0!})=54$

- الحالات الماكروية الممكنة (المحققة للتوزع الطبيعي) من أجل $N=4$ هي الحالة الوحيدة التالية: (3,1,0)

عدد حالات التوزع الميكروي (الوزن الإحصائي) $W_{(3,1,0)}=N!\prod_{i=1}^{M}\frac{g_i^{N_i}}{N_i!}=4!(\frac{3^3}{3!}\ \frac{2^1}{1!}\ \frac{1^0}{0!})=216$

- الحالات الماكروية الممكنة (المحققة للتوزع الطبيعي) من أجل $N=5$ هما الحالتين التاليتين:
(4,1,0) و (3,2,0)

عدد حالات التوزع الميكروي (الوزن الإحصائي) لكل حالة ممكنة:

$$W_{(3,2,0)}=N!\prod_{i=1}^{M}\frac{g_i^{N_i}}{N_i!}=5!\,(\frac{3^3}{3!}\ \frac{2^2}{2!}\ \frac{1^0}{0!})=1080$$

$$W_{(4,1,0)}=N!\prod_{i=1}^{M}\frac{g_i^{N_i}}{N_i!}=5!\,(\frac{3^4}{4!}\ \frac{2^1}{1!}\ \frac{1^0}{0!})=810$$

من الواضح هنا أن حالة التوزع الماكروي الممكن (3,2,0) هي الحالة الأكثر احتمال (حالة توازن).

عبارة أرقام انشغال السويات المتصلة في الحالة المتوازنة (توزع مكسويل - بولتزمان في الحالة الأكثر احتمالاً):

عند الطاقات العالية: حيث يمكن اعتبار سويات الطاقة مستمرة، نستطيع إيجاد عدد الجسيمات الواقعة في المجال الطاقي $[\varepsilon,\varepsilon+d\varepsilon]$، بأخذ التكامل على السويات الواقعة في المجال $]0\to\infty[$، مع مراعاة تبعية درجة التحلل لسوية الطاقة $g(\varepsilon)$. على النحو التالي:

$$N_i = e^{\alpha}\, g_i\, e^{\beta\varepsilon_i} \;\Rightarrow\; \boxed{N(\varepsilon)=\int_0^{\infty} dN(\varepsilon) = e^{\alpha}\int_0^{\infty} e^{\beta\varepsilon}\, g(\varepsilon)\, d\varepsilon}$$

تابع التحاص الكلاسيكي Z (تحاص بولتزمان):

اشتُقت تسمية "تابع التحاص" من " المُحاصصة " وهو مصطلح يعبر عن إمكانية تجزئة طاقة أحد جسيمات الجملة على مختلف سويات الطاقة وتحللاتها. وبكلام آخر: يعبر عن نصيب درجة التحلل الواحدة من وحدة طاقة الجسيم.

ويُعرف بتابع تجزئة معامل بولتزمان $e^{\beta\varepsilon}$ ، أو تابع تحاص M-B الكلاسيكي Z .

ويأخذ في حالة التوزع المنفصل لسويات الطاقة $\varepsilon_i\ ;\ i=1,2,3,.....$ الصيغة:

$$\boxed{Z=\sum_i g_i e^{\beta\varepsilon_i}}$$

ومن أجل السويات غير المتحللة (المفردة) تكون $\boxed{g_i = 1 \;\Rightarrow\; Z=\sum_i e^{\beta\varepsilon_i}}$

وفي الحالة المستمرة: نصوغ تابع تحاص الجسيمات الواقعة في المجال الطاقي $[\varepsilon,\varepsilon+d\varepsilon]$ باستبدال عبارة المجموع $\sum$ بالتكامل $\int$ (في المجال $]0\to\infty[$)، مع مراعاة تبعية درجة التحلل لسوية الطاقة $g(\varepsilon)$، على النحو التالي:

$$\boxed{Z=\int_0^{\infty} e^{\beta\varepsilon}\, g(\varepsilon)\, d\varepsilon}$$

لذا يمكن كتابة العدد الكلي للجسيمات بدلالة Z (في حالتي التوزعين المنفصل والمستمر) بالشكل:

$$\left.\begin{aligned} N &= \sum_i N_i = e^{\alpha}\sum_i g_i e^{\beta\varepsilon_i} \\ N &= \int_0^{\infty} dN = e^{\alpha}\int_0^{\infty} e^{\beta\varepsilon}\, g(\varepsilon)\, d\varepsilon \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \boxed{N = e^{\alpha} Z} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{e^{\alpha} = \frac{N}{Z}}$$

إيجاد قيمة Z في الحالة المستمرة بدلالة متحولات الجملة:

من عبارة تابع التحاص في الحالة المستمرة $\quad Z=\int_0^{\infty} e^{\beta\varepsilon}\, g(\varepsilon)\, d\varepsilon$

بالاستفادة من العلاقة التي تربط درجة التحلل $g(\varepsilon)$ بعنصر فراغ الطاقة الطوري $d\Gamma(\varepsilon)$

$$g(\varepsilon)\,d\varepsilon = C\, d\Gamma(\varepsilon) = CV\,2\pi\,(2m)^{3/2}\,(\varepsilon)^{1/2}\, d\varepsilon$$

وبالتعويض وإخراج المقدار الثابت $CV\,2\pi\,(2m)^{3/2}$ خارج عبارة التكامل، نجد:

$$Z = CV\,2\pi\,(2m)^{3/2}\int_0^{\infty} \varepsilon^{1/2}\, e^{\beta\varepsilon}\, d\varepsilon$$

فإذا أخذنا بعين الاعتبار أن قيمة $\beta<0$ حيث $\beta=-1/KT$ نجد:

$$Z = CV\,2\pi\,(2m)^{3/2}\int_0^{\infty} \varepsilon^{1/2}\, e^{-\varepsilon/KT}\, d\varepsilon$$

نحل التكامل بتحويله لتابع غاما: لذا نفرض $x=\varepsilon/KT$ فنجد:

$$\varepsilon = KT\,x \;\Rightarrow\; d\varepsilon = KT\,dx \qquad \wp \qquad \varepsilon^{1/2} = (KT)^{1/2}\, x^{1/2}$$

وبالتعويض في عبارة التكامل:

$$Z = CV\,2\pi\,(2m)^{3/2}(KT)^{1/2}\,KT\underbrace{\int_0^\infty x^{1/2}\,e^{-x}\,dx}_{\Gamma(\frac{3}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

$$Z = CV\,2\pi\,(2m)^{3/2}(KT)^{3/2}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Z = CV\,(2\pi mKT)^{3/2}}$$

تمرين: تحقق من أن Z عديم البعد إذا علمت أن: $C = 1/h^3$ و $[h] = J\,S$ و $[KT] = J$ و $[m] = kg$ و $[V] = m^3$

عبارة أرقام انشغال السويات بدلالة تابع التحاص Z:

من عبارة رقم انشغال السويات نجد:

$$N_i = e^{\alpha}\,g_i\,e^{\beta\varepsilon_i} \quad \Rightarrow \quad \boxed{N_i = \frac{N}{Z}\,g_i\,e^{\beta\varepsilon_i}}$$

مشغولية درجة التحلل بدلالة تابع التحاص الكلاسيكي Z: $N_g(\varepsilon_i)$

يُقصد بالمشغولية هنا (عدد الجسيمات في درجة التحلل الواحدة N_i/g_i). اي نصيب الحجرة الواحدة (الطبقة الواحدة)، (درجة التحلل الواحدة)، $g(\varepsilon_i)$ ، من الجسيمات العائدة لذات السوية $N(\varepsilon_i)$. ونرمز له بالرمز $N_g(\varepsilon_i)$.

ونجده من عبارة أرقام انشغال السويات (في حالتي التوزعين المنفصل والمستمر)، بالشكل التالي:

$$N_g(\varepsilon_i) = \frac{N_i}{g_i} = e^{\alpha}\,e^{\beta\varepsilon_i} \quad \Rightarrow \quad \boxed{N_g(\varepsilon_i) = \frac{N}{Z}\,e^{\beta\varepsilon_i}}$$

$$N_g(\varepsilon) = \frac{dN(\varepsilon)}{dg(\varepsilon)} = \frac{N(\varepsilon)\,d\varepsilon}{g(\varepsilon)\,d\varepsilon} = \frac{e^{\alpha}\,e^{\beta\varepsilon}\,g(\varepsilon)\,d\varepsilon}{g(\varepsilon)\,d\varepsilon} = e^{\alpha}\,e^{\beta\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \boxed{N_g(\varepsilon) = \frac{N}{Z}\,e^{\beta\varepsilon}}$$

تابع توزع مكسويل – بولتزمان للحالة المستمرة بدلالة تابع التحاص: $dN(\varepsilon)$

لإيجاد عدد الجسيمات $dN(\varepsilon)$ الواقعة في المجال الطاقي $[\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon]$، (في الحالة المستمرة)، الخاضعة لتوزع مكسويل - بولتزمان. نطبق العلاقة التالية:

عدد الجسيمات $dN(\varepsilon)$ = مشغولية درجة التحلل الواحد $N_g(\varepsilon)$	X عدد درجات التحلل $dg(\varepsilon)$

أو بالشكل:

عدد الجسيمات $dN(\varepsilon)$ = عدد الجسيمات في درجة التحلل الواحد $N_g(\varepsilon)$	X عدد درجات التحلل $dg(\varepsilon)$

أو من العبارة السابقة:

$$N_g(\varepsilon) = \frac{dN(\varepsilon)}{dg(\varepsilon)} = \frac{N(\varepsilon)\,d\varepsilon}{g(\varepsilon)\,d\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad dN(\varepsilon) = N_g(\varepsilon)\,dg(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad \boxed{dN(\varepsilon) = N_g(\varepsilon)\,g(\varepsilon)\,d\varepsilon}$$

وبالتعويض عن مشغولية درجة التحلل [$N_g(\varepsilon)$ المعطاة بدلالة تابع التحاص الكلاسيكي Z]، نحصل على تابع توزع M-B للحالة المستمرة بدلالة تابع التحاص كما يلي:

$$\boxed{dN(\varepsilon) = \frac{N}{Z}\,e^{\beta\varepsilon}\,g(\varepsilon)\,d\varepsilon} \qquad (*)$$

تمثل (*) العبارة التفاضلية لعدد الجسيمات الموزعة تبعاً لطاقاتها، في المجال الطاقي $[\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon]$.

بالمشابهة مع (*):

يمكننا إيجاد العبارة التفاضلية لعدد الجسيمات الموزعة تبعاً لاندفاعاتها، في مجال الاندفاع $[P, P + dP]$.

بعد اعتبار أن طاقة الجسيم الحركية مرتبطة باندفاعه وفق العلاقة: $\varepsilon = m\vartheta^2/2 = P^2/2m$

$$\boxed{dN(P) = \frac{N}{Z} e^{\beta P^2/2m}\, g(P)\, dP} \qquad (**)$$

كما يمكننا إيجاد العبارة التفاضلية لعدد الجسيمات الموزعة تبعاً لسرعها المطلقة، في مجال السرعات $[\vartheta, \vartheta + d\vartheta]$.

بعد اعتبار أن طاقة الجسيم الحركية مرتبطة بسرعته وفق العلاقة: $\varepsilon = m\vartheta^2/2$

$$\boxed{dN(\vartheta) = \frac{N}{Z} e^{\beta m\vartheta^2/2}\, g(\vartheta)\, d\vartheta} \qquad (***)$$

هذا وسنعود لدراسة هذه التوابع بالتفصيل في البحث التالي: (تطبيقات إحصاء مكسويل – بولتزمان)

مضاريب لاغرانج: α و β

- المضروب α:

يمكن إيجاد قيمة المضروب α بدلالة Z وذلك بأخذ لغارتم طرفي العبارة $e^{\alpha} = N/Z$

$$\boxed{\alpha = Ln\frac{N}{Z} = Ln\frac{N}{CV\,(2\pi mKT)^{3/2}}}$$

- المضروب β:

1- تعيين قيمة β ترموديناميكياً:

بما أن الجملة المدروسة جملة معزولة، فهي لا تتبادل العمل مع الوسط الخارجي

فنجد من المبدأ الأول في الترموديناميك:

$$\delta Q = dU + \underbrace{p\, dV}_{0} \quad \Rightarrow \quad \delta Q = dU \qquad (1)$$

أي أن مقدار التغير في طاقتها الداخلية يساوي مقدار التغير في مخزونها الحراري.

وبما أن الجملة المعزولة متوازنة، فهي تحقق معادلة لاغرانج. $dLnW_{max} + \alpha\, dN + \beta\, dU = 0$

وبما أن عدد جسيمات الجملة المعزولة ثابت $N = cte \Rightarrow dN = 0$ ، وبمراعاة (1) نجد:

$$dLnW_{max} + \beta\,\delta Q = 0 \qquad (2)$$

وبالاستفادة - من المبدأ الثاني في الترموديناميك: $\delta Q = T\, dS_{max}$

- ومن قانون بولتزمان $S_{max} = K\, Ln\, W_{max} \Rightarrow dS_{max} = K\, dLn\, W_{max} \Rightarrow dLn\, W_{max} = \frac{dS_{max}}{K}$

وبالتعويض في (2) عن كلٍ بقيمته نجد:

$$\frac{dS_{max}}{K} + \beta T\, dS_{max} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\beta = -\frac{1}{KT}}$$

2- تعيين قيمة β اعتماداً على النظرية الحركية للغازات المثالية:

تعطي النظرية الحركية للغازات المثالية متوسط طاقة الجسيم الذي يملك ثلاث درجات حرية بالشكل:

$$\bar{\varepsilon} = 3KT/2 \qquad (3)$$

وحيث أن متوسط طاقة الجسيم تحسب إحصائياً بالعلاقة:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{U}{N} = \sum_i \varepsilon_i N_i \Big/ \sum_i N_i$$

وبالتعويض عن قيمة توزع $(M\text{-}B)$ في الحالة الأكثر احتمالاً: $N_i = g_i\, e^{\alpha + \beta\varepsilon_i} = e^{\alpha} g_i e^{\beta\varepsilon_i}$

حيث e^{α} ثابت، يمكن إخراجه خارج عبارة المجموع والاختزال عليه:

$$\bar{\varepsilon} = \sum_i \varepsilon_i\, g_i e^{\beta\varepsilon_i} \Big/ \sum_i g_i e^{\beta\varepsilon_i} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\varepsilon} = \frac{1}{Z}\sum_i \varepsilon_i\, g_i e^{\beta\varepsilon_i}$$

وبما أن الجملة المدروسة هي جسيمات كلاسيكية، ندرس طاقاتها في الحالة المستمرة، (في المجال $[\varepsilon,\varepsilon+d\varepsilon]$)،
ونستبدل عبارة المجموع بالتكامل (في المجال $]0\to\infty[$)، مع مراعاة تبعية درجة التحلل لسوية الطاقة $g(\varepsilon)$. فنجد:

$$\bar{\varepsilon}=\int_0^\infty \varepsilon e^{\beta\varepsilon}\,g(\varepsilon)\,d\varepsilon \Big/ \int_0^\infty e^{\beta\varepsilon}\,g(\varepsilon)\,d\varepsilon \quad\Leftrightarrow\quad \bar{\varepsilon}=\frac{1}{Z}\int_0^\infty \varepsilon e^{\beta\varepsilon}\,g(\varepsilon)\,d\varepsilon$$

وبالاستفادة من العلاقة التي تربط درجة التحلل $g(\varepsilon)$ بعنصر فراغ الطاقة الطوري $d\Gamma(\varepsilon)$

$$g(\varepsilon)\,d\varepsilon=C\,d\Gamma(\varepsilon)=CV\,2\pi\,(2m)^{3/2}\,(\varepsilon)^{1/2}\,d\varepsilon$$

وبالتعويض وإخراج المقدار الثابت $C\,2\pi V(2m)^{3/2}$ خارج عبارة التكامل، والاختزال عليه نجد:

$$\bar{\varepsilon}=\int_0^\infty \varepsilon^{3/2}\,e^{\beta\varepsilon}\,d\varepsilon \Big/ \int_0^\infty \varepsilon^{1/2}\,e^{\beta\varepsilon}\,d\varepsilon$$

نحل التكامل في البسط بالتجزئة. فنفرض ما يلي:

$$u=\varepsilon^{3/2}\Rightarrow du=\frac{3}{2}\varepsilon^{1/2}d\varepsilon \qquad و \qquad dV=e^{\beta\varepsilon}\,d\varepsilon\Rightarrow V=\frac{1}{\beta}e^{\beta\varepsilon}$$

فيصبح التكامل الموجود في البسط على الصورة:

$$\int_0^\infty \varepsilon^{3/2}\,e^{\beta\varepsilon}\,d\varepsilon=\underbrace{\frac{\varepsilon^{3/2}}{\beta}e^{\beta\varepsilon}\Big|_0^\infty}_{0}-\frac{3}{2\beta}\int_0^\infty \varepsilon^{1/2}e^{\beta\varepsilon}\,d\varepsilon$$

الحد الأول معدوم لأن $\beta<0$ (سالبة). وبالتعويض نجد:

$$\bar{\varepsilon}=-\frac{3}{2\beta}\int_0^\infty \varepsilon^{1/2}e^{\beta\varepsilon}\,d\varepsilon \Big/ \int_0^\infty \varepsilon^{1/2}\,e^{\beta\varepsilon}\,d\varepsilon=-\frac{3}{2\beta}$$

وبالتعويض عن $\bar{\varepsilon}$ بقيمتها من (3) نجد:

$$-\frac{3}{2\beta}=\frac{3KT}{2}\quad\Rightarrow\quad \boxed{\beta=-\frac{1}{KT}}$$

مثال: أثبت أنه يمكن اعتبار مول واحد من غاز الهيليوم He في الظروف الطبيعية $P=1atm$ و $T=273k^o$ بمثابة غاز مثالي. علماً أن: $m_{He}=6{,}65\times10^{-27}kg$ و $V_{mol}=22{,}4L=22{,}4\times10^{-3}m^3$
و $N=N_A=6{,}02\times10^{23}\,Atom/mol$ و $h=6{,}63\times10^{-34}J\,S$ و $K=1{,}38\times10^{-23}J\,k^{-1}$

الحل: نحسب مشغولية درجات التحلل (الحجرات) بالجسيمات، بتطبيق عبارة مشغولية درجة التحلل:

$$g_N(\varepsilon)=\frac{N(\varepsilon)}{g(\varepsilon)}=\frac{N}{Z}e^{\beta\varepsilon}=\frac{N_A}{Z}e^{-\varepsilon/KT}$$

تتوضع معظم جزيئات غاز الهيليوم He في الظروف الطبيعية في السوية الأرضية حيث تكون $\varepsilon<<KT$ بحيث يمكن اعتبار طاقتها معدومة $\varepsilon\approx0$. فتكون قيمة التابع الأسي $e^{-\varepsilon/KT}\approx1$.
نحسب قيمة تابع التحاصل باعتبار $C=1/h^3$ بالشكل التالي:

$$Z=CV(2\pi m_{He}KT)^{3/2}=V\left(\frac{2\pi m_{He}KT}{h^2}\right)^{3/2}=22{,}4\times10^{-3}m^3\left(\frac{2\times3.14\times6{,}65\times10^{-27}kg\times1{,}38\times10^{-23}J\,k^{-1}\times273\,k^o}{(6{,}63\times10^{-34}J\,S)^2}\right)^{3/2}$$

$$Z=22{,}4\times10^{-3}\left(\frac{15733\times10^{-50}}{44\times10^{-68}}\right)^{3/2}=22{,}4\times10^{-3}(358\times10^{18})^{3/2}=22{,}4\times10^{-3}\times6761\times10^{27}=151{,}461\times10^{27}$$

بالتعويض في عبارة مشغولية درجة التحلل:

$$g_N(\varepsilon)=\frac{6{,}02\times10^{23}}{151{,}461\times10^{27}}\approx0.04\times10^{-4}=4\times10^{-6}\Rightarrow\frac{N_i}{g_i}=\frac{4}{10^6}\quad\Leftrightarrow\quad g_i>>N_i$$

تدل النتيجة $g_i >> N_i$ (المعبرة عن شرط الغاز المثالي) على أن نسبة قليلة جداً من الحجرات تكون مشغولة بالجسيمات، (بمعدل 4 جسيمات لمليون حجرة). أي أن احتمال وقوع جسيمين في حجرة واحدة أمر شبه مستحيل.
أي أنه يمكن اعتبار غاز الهيليوم He في الظروف الطبيعية $P = 1atm$ و $T = 273k^o$ بمثابة غاز مثالي.

<u>الانحراف عن وضع التوازن:</u>

نفرض جملة معزولة مكونة من N جسيم متمايز، موزعة على ε_i سوية طاقة متحللة، أرقام انشغالها N_i .
كما نفرض وجود M حالة توزع ماكروي ممكن، وأن الحالة الماكروية M_o هي حالة التوازن (ذات الوزن الإحصائي الأعظمي " الموافقة للحالة الأكثر احتمالاً $W_{\max}$").
لإيجاد شكل التابع الذي يَنظُم الأوزان الإحصائية للحالات الماكروية الواقعة في الجوار المباشر للحالة M_o، أي الحالات الواقعة في المجال $[M_o \pm \Delta M]$، حيث ΔM صغير جداً. نستخدم منشور تايلور لـ لغارتم الوزن الإحصائي، وذلك باعتبار أن g_i ثابتة و W_{M-B} يتبع لـ N_i فقط.

$$LnW = LnW\Big|_{W_{\max}} + \underbrace{\frac{\Delta N_i}{1!}\frac{dLnW}{dN_i}\Big|_{W_{\max}}}_{0} + \frac{(\Delta N_i)^2}{2!}\frac{d^2LnW}{dN_i^{\,2}}\Big|_{W_{\max}} + ...$$

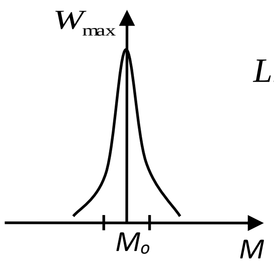
نلاحظ من عبارة توزع $(M-B)$ أن: $\Delta N_i = \left|N_i - \overline{N}_i\right| = 0$ ، أي أن الحد الثاني من المنشور معدوم.

ومن (*) حيث $dLn(W_{M-B}) = \sum_i Ln\frac{g_i}{N_i}dN_i$ نجد بعد إهمال الدليل $(M-B)$ لسهولة الكتابة، والاشتقاق ثانيةً:

$$\frac{dLnW}{dN_i} = \sum_i Ln\frac{g_i}{N_i} \;\Rightarrow\; \frac{d^2LnW}{dN_i^{\,2}}\Big|_{W_{\max}} = \sum_i \frac{d}{dN_i}\left(Ln\frac{g_i}{N_i}\right)\Big|_{W_{\max}} = \sum_i \frac{-g_i/N_i^{\,2}}{g_i/N_i}\Big|_{W_{\max}} = -\sum_i \frac{1}{N_i}\Big|_{W_{\max}} = -\delta$$

وبالتعويض في عبارة المنشور

$$LnW \approx LnW_{\max} - \frac{\delta}{2}(\Delta N_i)^2 \;\Rightarrow\; Ln\frac{W}{W_{\max}} \approx -\frac{\delta}{2}(\Delta N_i)^2 \;\Rightarrow\; W = W_{\max}\, e^{-\frac{\delta}{2}(\Delta N_i)^2}$$



شكل ( )

وهو يكافئ توزع غوص الطبيعي.
ويعني أن الحالات الماكروية الواقعة في الجوار المباشر لحالة التوازن M_o تكون متناظرة كما هو موضح بالشكل ( ). ويكون انحدار المنحني في جوار M_o كبير جداً، الأمر الذي يجعل احتمال وقوعها قليل جداً

<u>مثال:</u> جملة معزولة، مكونة من $N = 4000$ جسيم متمايز (A,B,C,D,E,......). موزعةعلى ثلاث سويات للطاقة غير متحللة. طاقاتها: $\varepsilon_1 = 0 \;\; (J)$ و $\varepsilon_2 = \varepsilon_o \;\; (J)$ و $\varepsilon_3 = 2\varepsilon_o \;\; (J)$ حيث $\varepsilon_o = KT \;\; (J)$ والمطلوب:
1- احسب أرقام انشغال السويات في حالة التوازن عند الطاقة $U = 2300\varepsilon_o \;\; (J)$. وحدد نوع التوزع.
2- احسب تحاص الجملة بطريقتين مختلفتين.
3- يتم إحداث خلل في حالة التوازن عن طريق نزع جسيمين من السوية الثانية وتوزيعهما واحد للأولى والآخر للثالثة. احسب نسبة الوزنين الإحصائيين للجملة قبل وبعد.

الحل: 1- نطبق عبارة أرقام انشغال السويات في حالة التوازن (الحالة الأكثر احتمال) $N_i = g_i\, e^{\alpha+\beta\varepsilon_i}$. حيث $g_i = 1$

$$N_i = e^{\alpha}\, e^{-\varepsilon_i/KT} \;\Rightarrow\; N_1 = e^{\alpha} \;\; \wp \;\; N_2 = e^{\alpha}\, e^{-1} \;\; \wp \;\; N_3 = e^{\alpha}\, e^{-2}$$

نفرض $x = e^{-1}$ فيكون $x^2 = e^{-2}$. فتصبح أرقام انشغال السويات (بدلالة N_1) بالشكل التالي:

$$N_1 \;\; \wp \;\; N_2 = N_1\, x \;\; \wp \;\; N_3 = N_1\, x^2 \qquad (*)$$

وبتطبيق مبدأ انحفاظ عدد الجسيمات: $\sum_i N_i = N$.

$$N_1 + N_1\,x + N_1\,x^2 = 4000 \;\Rightarrow\; \boxed{N_1(1+x+x^2) = 4000} \qquad (1)$$

وبتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة: $\sum_i N_i\,\varepsilon_i = U$.

$$N_1(0)+N_2(\varepsilon_o)+N_3(2\varepsilon_o)=2300\,\varepsilon_o \quad \Rightarrow 0+N_1x+2N_1x^2=2300$$

$$\boxed{N_1(x+2x^2)=2300} \qquad (2)$$

بالحل المشترك لـ (1) و (2)، نوجد N_1 و x . فنجد بقسمة (1) على (2):

$$\frac{1+x+x^2}{x+2x^2}=\frac{40}{23} \quad \Rightarrow \quad 57x^2+17x-23=0$$

نحل المعادلة باستخدام المميز $\sqrt{\Delta}=\sqrt{(17)^2-4(57)(23)}\approx 74{,}83>0$ ويوجد حلان: $x_{1,2}=\dfrac{-17\pm 74{,}83}{2(57)}$

الأول $\boxed{x_1=0{,}5034}$ مقبول. والثاني $x_2=-0{,}802$ مرفوض (لأن $x=e^{-1}$ تابع أسي فهو موجب دوماً)

بتعويض الحل المقبول في (2) نحصل على رقم انشغال السوية الأولى $N_1=2277$

نعوض قيمة N_1 في (*) فنحصل على رقمي انشغال السويتين الثانية $N_2=1146$ والثالثة $N_3=577$

وبما أن $N_1>N_2>N_3$ فالتوزع طبيعي

2- نحسب تحاص الجملة:

أولاً: من العبارة $Z=\dfrac{N}{e^{\alpha}}=\dfrac{N}{N_1}=\dfrac{4000}{2277}\approx 1.757$

ثانياً: من العبارة $Z=\sum_i g_i\,e^{-\varepsilon_i/KT}=1+e^{-1}+e^{-2}=1+0.37+0.13\approx 1.5$

3- نحسب الوزن الإحصائي قبل إحداث الخلل في حالة التوازن (باستخدام قاعدة التوزع المسبق)

$$W_{(N_1,N_2,N_3)}=\frac{N!}{N_i!}=\frac{4000!}{2277!.1146!.577}$$

وبعد إحداث الخلل

$$W'_{(N_1+1,N_2-2,N_3+1)}==\frac{N!}{(N_1+1)!.(N_2-2)!.(N_3+1)!}=\frac{4000!}{2278!.1144!.578!}$$

النسبة:

$$\frac{W'}{W}=\frac{1146\times 1145}{2278\times 578}\approx 0.9966<1 \quad \Rightarrow \; W>W'$$

نلاحظ أن W الموافق لحالة التوازن (الحالة الأكثر احتمال) والترجحات الطفيفة الواقعة في الجوار مثل W' تكون بأوزان إحصائية أقل.