كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثانية**

المادة : توابع خاصة

المحاضرة : الثالثة /نظري/د.علي أسد

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الفيزياء

مقرر: التوابع الخاصة
المحاضرة: الثالثة
د. علي أسد

تحويل لابلاس (**Laplace transform**):

يعرف تحويل لابلاس للتابع $f(x)$ بأنه

$$\mathscr{L}[f(x)] = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x) dx = F(s) \qquad (1)$$

حيث s بارامتر

- **بعض خواص تحويل لابلاس:**

1) **الخاصية (1):**

$$\mathscr{L}[\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)] = \lambda_1 \mathscr{L}[f_1(x)] + \lambda_2 \mathscr{L}[f_2(x)]$$

λ_1 و λ_2 ثوابت اختيارية

2) **الخاصية (2) (الخاصية الانسحابية):** $\mathscr{L}[e^{ax} f(x)] = F(s-a)$

3) **الخاصية (3):** إذا كان $f(x) = 1$ فإن $\mathscr{L}[1] = \frac{1}{s}$

الاثبات: نجري عملية التكامل مباشرة:

$$\mathscr{L}[1] = \int_0^{+\infty} e^{-sx} dx = -\frac{1}{s} e^{-sx} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{s}$$

4) **الخاصية (4):** إذا كان $f(x) = x^n$ فإن $\mathscr{L}[x^n] = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$

الإثبات: من التعريف:

$$\mathscr{L}[x^n] = \int_0^{+\infty} e^{-sx} x^n dx$$

نفرض $sx = y$ وبالتالي: $x = \frac{y}{s} \Rightarrow dx = \frac{1}{s} dy$ نعوض في التكامل:

$$\mathscr{L}[x^n] = \int_0^{+\infty} e^{-y} \frac{y^n}{s^n} \frac{1}{s} dy = \frac{1}{s^{n+1}} \underbrace{\int_0^{+\infty} y^n e^{-y} dy}_{\Gamma(n+1)}$$

$$=\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$$

5) **الخاصية (5):** إذا كان $f(x)=e^{ax}$ فإن $\mathscr{L}[e^{ax}]=\frac{1}{s-a}$

الإثبات: من التعريف:

$$\mathscr{L}[e^{ax}]=\int_0^{+\infty}e^{-sx}e^{ax}dx=\int_0^{+\infty}e^{-(s-a)x}dx=-\frac{1}{(s-a)}e^{-(s-a)x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{s-a}$$

6) **الخاصية (6):** إذا كان $f(x)=\sinh bx$ فإن $\mathscr{L}[\sinh bx]=\frac{b}{s^2-b^2}$

الإثبات: لدينا:

$$\sinh bx=\frac{e^{bx}-e^{-bx}}{2}$$

وبالتالي:

$$\mathscr{L}[\sinh bx]=\mathscr{L}\left[\frac{1}{2}(e^{bx}-e^{-bx})\right]=\frac{1}{2}\left(\mathscr{L}[e^{bx}]-\mathscr{L}[e^{-bx}]\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-b}-\frac{1}{s+b}\right)$$

$$=\frac{b}{s^2-b^2}$$

7) **الخاصية (7):** إذا كان $f(x)=\sin bx$ فإن $\mathscr{L}[\sin bx]=\frac{b}{s^2+b^2}$

الاثبات: لدينا:

$$\sin bx=\frac{e^{ibx}-e^{-ibx}}{2i}$$

وبالتالي:

$$\mathscr{L}[\sin bx]=\mathscr{L}\left[\frac{1}{2i}(e^{ibx}-e^{-ibx})\right]=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathscr{L}[e^{ibx}]-\mathscr{L}[e^{-ibx}]\right)=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-ib}-\frac{1}{s+ib}\right)$$

$$=\frac{b}{s^2+b^2}$$

8) **الخاصية (8):** إذا كان $f(x)=cos\ bx$ فإن $\mathscr{L}[\cos bx]=\frac{s}{s^2+b^2}$

الإثبات: لدينا:

$$\cos bx=\frac{e^{ibx}+e^{-ibx}}{2}$$

وبالتالي:

$$\mathscr{L}[\cos bx] = \mathscr{L}\left[\frac{1}{2}(e^{ibx} + e^{-ibx})\right] = \frac{1}{2}\left(\mathscr{L}[e^{ibx}] + \mathscr{L}[e^{-ibx}]\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - ib} + \frac{1}{s + ib}\right)$$

$$= \frac{s}{s^2 + b^2}$$

9) **الخاصية (9):** إذا كان $f(x) = cosh\, bx$ فإن $\mathscr{L}[\cos bx] = \frac{s}{s^2 - b^2}$

الإثبات: لدينا:

$$\cos bx = \frac{e^{bx} + e^{-bx}}{2}$$

وبالتالي:

$$\mathscr{L}[\cosh bx] = \mathscr{L}\left[\frac{1}{2}(e^{bx} + e^{-bx})\right] = \frac{1}{2}\left(\mathscr{L}[e^{bx}] + \mathscr{L}[e^{-bx}]\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - b} + \frac{1}{s + b}\right)$$

$$= \frac{s}{s^2 - b^2}$$

سؤال (1): أوجد تحويل لابلاس للمشتقة الأولى $f'(x)$

الحل: من التعريف:

$$F(s) = \mathscr{L}[f'(x)] = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f'(x) dx$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-sx} df(x)$$

نكامل بالتجزئة: $dv = df(x) \Rightarrow v = f(x) \;\; , \; u = e^{-sx} \quad \Rightarrow du = -se^{-sx} dx$

وبالتالي:

$$F(s) = \frac{f(x)}{e^{sx}}\bigg|_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x)\, dx$$

$$= sF(s) - f(0)$$

سؤال (2): أوجد تحويل لابلاس للمشتقة الثانية $f''(x)$

الحل: من التعريف:

$$F(s) = \mathscr{L}[f''(x)] = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f''(x) dx$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-sx} d(f'(x))$$

نكامل بالتجزئة: $dv = d(f'^{(x)}) \Rightarrow v = f'(x) \ \ , \ u = e^{-sx} \quad \Rightarrow du = -se^{-sx}dx$

وبالتالي:

$$F(s) = \frac{f'(x)}{e^{sx}}\bigg|_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} e^{-sx} f'(x)\,dx$$

$$= -f'(0) + s[sF(s) - f(0)]$$

$$= s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

<u>**تعميم:**</u> تحويل لابلاس للمشتقة من المرتبة n

$$\mathscr{L}[f^{(n)}(x)] = s^n - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

❖ أمثلة:

<u>**مثال(1):**</u> أوجد تحويل لابلاس لـ

$$\mathscr{L}\left[x^2 - 5x^{\frac{3}{2}} + 7\right] = \mathscr{L}[x^2] - 5\mathscr{L}\left[x^{\frac{3}{2}}\right] + \mathscr{L}[7]$$

$$= \frac{\Gamma(3)}{s^3} - 5\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{s^{\frac{5}{2}}} + \frac{7}{s}$$

باستخدام خواص تابع غاما

$$\mathscr{L}\left[x^2 - 5x^{\frac{3}{2}} + 7\right] = \frac{2\Gamma(2)}{s^3} - 5\,\frac{3}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{s^{\frac{5}{2}}} + \frac{7}{s}$$

$$= \frac{2}{s^3} - \frac{15}{4}\frac{\sqrt{\pi}}{s^{\frac{5}{2}}} + \frac{7}{s}$$

<u>**مثال(2):**</u> أوجد تحويل لابلاس العكسي لكل مما يلي:

- $\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{5}{s^2-4}\right) = \frac{5}{2}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2-2^2}\right) = \frac{5}{2}\sinh(2x)$
- $\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{2s}{s^2+5}\right) = 2\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+5}\right) = 2\cos(\sqrt{5}x)$
- $\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{3}{s^2+2s-3}\right) = \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{3}{(s+1)^2-4}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{(s+1)^2-2^2}\right) = \frac{3}{2}e^{-x}sinh2x$

<u>**ملاحظة:**</u> استخدمنا تحويل لابلاس للتابع:

$$\mathscr{L}[e^{ax}\sinh bx] = \frac{b}{(s-a)^2 - b^2}$$

$$\mathscr{L}[e^{ax}\cosh bx] = \frac{s-a}{(s-a)^2 - b^2}$$

$$\mathscr{L}[e^{ax}\cos bx] = \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$$

$$\mathscr{L}[e^{ax}\sin bx] = \frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$$

ملاحظة: هنا استخدمنا الخاصية الانسحابية حيث استبدلنا كل s بـ s-a

<u>طريقة ثانية لحل المثال السابق:</u>

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{3}{s^2+2s-3}\right)$$

$$\frac{3}{s^2+2s-3} = \frac{3}{(s-1)(s+3)}$$

باستخدام تجزئة الكسور:

$$\frac{3}{(s-1)(s+3)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+3}$$

بتوحيد المقامات وحذفها:

$$3 = (A+B)s - A + 3B$$

بالمطابقة بين الطرفين:

$$A + B = 0$$

$$-A + 3B = 3$$

بالحل المشترك نجد:

$$A = -\frac{3}{4} \quad , B = \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{(s-1)(s+3)} = -\frac{3}{4}\frac{1}{s-1} + \frac{3}{4}\frac{1}{s+3}$$

نأخذ تحويل لابلاس العكسي للطرفين:

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{3}{(s-1)(s+3)}\right] = -\frac{3}{4}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) + \frac{3}{4}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+3}\right)$$

$$= -\frac{3}{4}e^{x} + \frac{3}{4}e^{-3x}$$

ملاحظة النتيجتان متطابقتان إذا عوضنا

$$\sinh 2x = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}$$

- $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{5s+1}{(s+2)(s+3)}\right]$

$$\frac{5s+1}{(s+2)(s+3)} = \frac{A}{(s+2)} + \frac{B}{(s+3)}$$

$$5s + 1 = As + 3A + Bs + 2B$$

$$5s + 1 = (A + B)s + 3A + 2B$$

بمطابقة الأمثال في الطرفين:

$$A + B = 5$$

$$3A + 2B = 1$$

بالحل المشترك نجد:

$$B = 14 \qquad , \quad A = -9$$

$$\frac{5s+1}{(s+2)(s+3)} = \frac{-9}{(s+2)} + \frac{14}{(s+3)}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{5s+1}{(s+2)(s+3)}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{-9}{(s+2)}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{14}{(s+3)}\right]$$

$$= -9e^{-2x} + 14e^{-3x}$$

❖ استخدام تحويل لابلاس في حل المعادلات التفاضلية العادية:

مثال (3): أوجد الحل الوحيد للمعادلة:

$$y'' + y = \sin(2x) \qquad , \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

الحل: نأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة:

$$\mathscr{L}[y''] + \mathscr{L}[y] = \mathscr{L}[\sin(2x)]$$

باستخدام خصائص تحويل لابلاس:

$$s^2Y - sY(0) - Y'(0) + Y = \frac{2}{s^2 + 4}$$

ومنها:

$$Y=\frac{s^2+6}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

نستخدم تجزئة الكسور:

$$\frac{s^2+6}{(s^2+1)(s^2+4)}=\frac{As+B}{(s^2+1)}+\frac{Cs+D}{(s^2+4)}$$

بتوحيد المقامات وحذفها:

$$s^2+6=As^3+4As+Bs^2+4B+Cs^3+Cs+Ds^2+D$$

بتجميع الحدود المتشابهة ومطابقة الأمثال في الطرفين:

$$A+C=0$$

$$B+D=1$$

$$4A+C=0$$

$$4B+D=6$$

بالحل المشترك:

$$A=C=0 \qquad B=\frac{5}{3}\ ,\ D=-\frac{2}{3}$$

$$\frac{s^2+6}{(s^2+1)(s^2+4)}=\frac{5}{3}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{s^2+4}\right)$$

نأخذ تحويل لابلاس العكسي:

$$\mathscr{L}^{-1}[Y(s)]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s^2+6}{(s^2+1)(s^2+4)}\right]=\frac{5}{3}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]-\frac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+2^2}\right]=y(x)$$

$$\Rightarrow y(x)=\frac{5}{3}\sin x-\frac{1}{3}\sin 2x$$

مثال(4): باستخدام تحويل لابلاس أوجد الحل الوحيد للمعادلة التفاضلية:

$$y''+2y'-y=e^x\sin x \qquad y(0)=0\quad ,\qquad y'(0)=1$$

الحل: نأخذ مؤثر لابلاس لطرفي المعادلة فنجد:

$$s^2Y-sY(0)-Y'(0)+2[sY-Y(0)]-Y=\frac{1}{(s-1)^2+1}$$

$$(s^2+2s-1)Y=\frac{1}{(s-1)^2+1}+1$$

$$Y=\frac{s^2-2s+3}{(s^2+2s-1)(s^2-2s+2)}$$

نقوم بتجزئة الكسور:

$$\frac{s^2-2s+3}{(s^2+2s-1)(s^2-2s+2)}=\frac{As+B}{s^2+2s-1}+\frac{Cs+D}{s^2-2s+2}$$

بتوحيد المقامات وحذفها:

$$s^2-2s+3=As^3-2As^2+2As+Bs^2-2Bs+2B+Cs^3+2Cs^2-Cs+Ds^2+2Ds-D$$

$$s^2-2s+3=(A+C)s^3+(-2A+B+2C+D)s^2+(2A-2B-C+2D)s+(2B-D)$$

بمطابقة الأمثال في الطرفين:

$$A+C=0 \qquad (1)$$

$$-2A+B+2C+D=1 \qquad (2)$$

$$2A-2B-C+2D=-2 \qquad (3)$$

$$2B-D=3 \qquad (4)$$

من (1):

$$A=-C \qquad (5)$$

من (4):

$$D=2B-3 \qquad (6)$$

نعوض (5) و (6) في (2)

$$-4A+3B=4 \qquad (7)$$

نعوض (5) و (6) في (3)

$$3A+2B=8 \qquad (8)$$

نضرب (7) بـ 3 و (8) بـ (4) ونجمع طرفاً إلى طرف:

$$17B=44$$

$$B=\frac{44}{17} \quad , \quad A=\frac{16}{17} \;, C=-\frac{16}{17} \;, D=\frac{37}{17}$$

$$\frac{s^2-2s+3}{(s^2+2s-1)(s^2-2s+2)} = \frac{1}{17}\left(\frac{16s+44}{s^2+2s-1}\right) + \frac{1}{17}\left(\frac{-16s+37}{s^2-2s+2}\right)$$

$$= \frac{1}{17}\left[\frac{16(s+1)+28}{(s+1)^2-2} + \frac{-16(s-1)+21}{(s-1)^2+1}\right]$$

$$= \frac{1}{17}\left[16\frac{s+1}{(s+1)^2-2} + \frac{28}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{(s+1)^2-2} - 16\frac{s-1}{(s-1)^2+1} + 21\frac{1}{(s-1)^2+1}\right]$$

نأخذ تحويل لابلاس العكسي:

$$y(x) = \frac{1}{17}\left[16e^{-x}cosh\sqrt{2}x + 14\sqrt{2}e^{-x}\sinh\sqrt{2}x - 16e^{x}\cos x + 21e^{x}\sin x\right]$$