كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الاولى

المادة : بصريات هندسية

المحاضرة : حساب الاخطاء /عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

حساب الارتياب (الأخطاء):

تقع الأخطاء في القياسات أثناء إجراء التجارب وذلك بسبب العديد من المصادر منها (أدوات القياس ، المجرب، القوانين المستخدمة(التي تحوي ... π ، $\sqrt{}$) وأيضاً ظروف التجربة) .

وبغية الحرص على تجنب الوقوع في الخطأ وحصره ضمن حدود مقبولة سنستخدم طريقتين لحساب مقدار الخطأ في قياس تجربة معينة (قانون معين).

أولاً: <u>الطريقة التفاضلية:</u>

" تعتمد هذه الطريقة على خواص الاشتقاق "

_لنأخذ العبارة الرياضية التالية $A = B^n.C$ **<u>كمثال نموذجي</u>** لتوضيح حساب الخطأ المرتكب في القانون بالطريقة التفاضلية:

1) نفاضل طرفي العبارة A كما يلي:

$$dA = n.B^{n-1}.C.dB + B^n dC \qquad (*)$$

2) نقسم طرفي العبارة (*) على A

$$\frac{dA}{A} = \frac{n.B^{n-1}.C.dB + B^n dC}{A}$$

نعوض عن A في الطرف اليمين:

$$\frac{dA}{A} = \frac{n.B^{n-1}.C.dB + B^n dC}{B^n.C}$$

نُصلح العلاقة ونجهزها للاختصار:

$$\frac{dA}{A} = \frac{n.B^{n-1}.\cancel{C}.dB}{B^n.\cancel{C}} + \frac{\cancel{B^n} dC}{\cancel{B^n}.C}$$

وهي معادلة حساب الخطأ النموذجية

$$\frac{dA}{A} = \frac{n.B^{n-1}}{B^n} dB + \frac{dC}{C}$$

لدينا ثلاث أخطاء ترد في المسائل وهي (الخطأ النسبي، الخطأ النسبي المئوي، الخطأ المطلق) يمكن إجادها من خلال معادلة حساب الأخطاء

✓ **للحصول على الخطأ النسبي:**

نستبدل رمز التفاضل التام d في معادلة حساب الأخطاء برمز الارتياب Δ، والاشارات السالبة تتحول لموجبة إن وُجدت كما يلي:

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{n.B^{n-1}.\Delta B}{B^n} + \frac{\Delta C}{C}$$

✓ **للحصول على الخطأ النسبي المئوي:**

فقط نضرب الخطأ النسبي السابق بـ % أو *100 كما يلي:

$$\frac{\Delta A}{A}\% = \left(\frac{n.B^{n-1}.\Delta B}{B^n} + \frac{\Delta C}{C}\right) \times 100$$

✓ **للحصول على الخطأ المطلق ΔA :**

يمكننا حسابه من عبارة الخطأ النسبي بعد ضرب طرفيها بـ A كما يلي:

$$\Delta A = \left(\frac{n.B^{n-1}.\Delta B}{B^n} + \frac{\Delta C}{C}\right) \times A$$

القيمة الفعلية للمقدار هي $A_{\text{الفعلية}} = A_{\text{المقيسة}} \pm \Delta A$

حيث أن:

ΔA , ΔB , ΔC , ΔD هي مقدار عددي يعبر عن مقدار الخطأ المرتكب (الارتياب) خلال عملية القياس.

سؤال: أوجد بالطريقة التفاضلية الخطأ النسبي والنسبي المئوي والمطلق المرتكب في حساب مساحة دائرة نصف قطرها $r = 0.5m$ ،

علماً أن $\Delta r = 0.001m$

الحل:

نعلم أن مساحة الدائرة تعطى بالعلاقة $S = \pi . r^2$ بالتالي

نشتق طرفي عبارة مساحة الدائرة

$$ds = 2\pi r . dr$$

نقسم طرفي المعادلة على S

$$\Rightarrow \frac{ds}{s} = \frac{2\pi r . dr}{s}$$

فتصبح من الشكل:

$$\frac{ds}{s} = \frac{2\pi r . dr}{\pi . r^2}$$

نختصر المقادير المتشابهة:

$$\frac{ds}{s} = \frac{2 . dr}{r}$$

فيكون:

أولاً: الخطأ النسبي

$$\frac{\Delta s}{s} = \frac{2 . \Delta r}{r}$$

نعوض للحصول على القيمة العددية للخطأ النسبي فيكون

$$\frac{\Delta s}{s} = \frac{2 \times 0.001}{0.5} = 0.004$$

ثانياً: الخطأ النسبي المئوي

من عبارة الخطأ النسبي نضرب الطرفين بـ %

$$\frac{\Delta s}{s}\% = \frac{2 . \Delta r}{r} \times 100$$

نعوض للحصول على القيمة العددية للخطأ النسبي المئوي فيكون

$$\frac{\Delta s}{s}\% = \frac{2 \times 0.001}{0.5} \times 100 = 4\%$$

ثالثاً: الخطأ المطلق

من عبارة الخطأ النسبي نحصل على الخطأ المطلق في حساب مساحة الدائرة

$$\Delta S = (2\frac{\Delta r}{r}) \times S$$

نعوض للحصول على القيمة العددية للخطأ النسبي المئوي فيكون

$$S = \pi . r^2 = \pi . 0.5^2 = 0.785375\ m^2$$

$$\Delta s = \left(2\frac{0.001}{0.5}\right) \times\ 0.785375 = 0.0031415$$

فتكون القيمة الفعلية لمساحة الدائرة هي $S_{\text{الفعلية}} = S_{\text{المقيسة}} \pm \Delta s$

$$\Rightarrow S_{\text{الحقيقية}} = 0.785375 \pm 0.0031415$$

ثانياً: الطريقة اللوغاريتمية:

" تعتمد هذه الطريقة على خواص اللوغاريتم والاشتقاق"

_ لنأخذ العبارة الرياضية التالية $A = B^n.C$ **كمثال نموذجي** لتوضيح حساب الخطأ المرتكب في القانون بالطريقة اللوغاريتمية:

1) نأخذ لوغاريتم طرفي العبارة A كما يلي :

$$\ln A = \ln(B^n.C)$$

وباستخدام خاصة اللوغاريتم التالية

$$\ln(x \times y \times z \times \dots) = \ln x + \ln y + \ln z + \cdots..$$

تصبح العبارة $\ln A$ من الشكل:

$$\ln A = \ln B^n + \ln C$$

وباستخدام خاصة اللوغاريتم التالية

$$\ln x^n = n.\ln x$$

فتصبح العبارة $\ln A$ من جديد من الشكل:

$$\ln A = n\ln B + \ln C \qquad (**)$$

2) نفاضل طرفي العبارة ** كما يلي

$$d(\ln A) = n.d(\ln B) + d(\ln C)$$

وهي معادلة حساب الخطأ النموذجية

$$\frac{dA}{A} = n.\frac{dB}{B} + \frac{dC}{C}$$

لدينا ثلاث أخطاء ترد في المسائل وهي (الخطأ النسبي، الخطأ النسبي المئوي، الخطأ المطلق) يمكن إجادها من خلال معادلة حساب الأخطاء

✓ **للحصول على الخطأ النسبي:**

نستبدل رمز التفاضل التام d في معادلة حساب الأخطاء برمز الارتياب Δ، والاشارات السالبة تتحول لموجبة إن وُجدت كما يلي:

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{n.\Delta B}{B} + \frac{\Delta C}{C}$$

✓ **للحصول على الخطأ النسبي المئوي:**

فقط نضرب الخطأ النسبي السابق بـ % أو *100 كما يلي:

$$\frac{\Delta A}{A}\% = (\frac{n.\Delta B}{B} + \frac{\Delta C}{C}) \times 100$$

✓ **للحصول على الخطأ المطلق ΔA :**

يمكننا حسابه من عبارة الخطأ النسبي بعد ضرب طرفيها بـ A كما يلي:

$$\Delta A = (\frac{n.\Delta B}{B} + \frac{\Delta C}{C}) \times A$$

القيمة الفعلية للمقدار هي $A_{\text{الفعلية}} = A_{\text{المقيسة}} \pm \Delta A$

حيث أن:

ΔA , ΔB , ΔC , ΔD هي مقدار عددي يعبر عن قيمة الخطأ المرتكب (الارتياب) خلال عملية القياس.

سؤال: أوجد بالطريقة اللوغاريتمية الخطأ النسبي والنسبي المئوي والمطلق المرتكب في حساب مساحة دائرة نصف قطرها $r = 0.5m$ ، علماً أن $\Delta r = 0.001m$

الحل:

نعلم أن مساحة الدائرة تعطى بالعلاقة $S = \pi . r^2$ بالتالي

نأخذ لوغاريتم طرفي العبارة S كما يلي:

$$\ln S = \ln \pi . r^2$$

وبتطبيق خصائص اللوغاريتم تصبح عبارة $\ln S$ من الشكل:

$$\ln S = \ln \pi + \ln r^2 = \ln \pi + 2. \ln r \qquad (*)$$

نفاضل طرفي العبارة $(*)$ كما يلي:

$$\frac{dS}{S} = 0 + 2d\ \ln r$$

معادلة حساب الأخطاء

$$\Rightarrow \frac{dS}{S} = 2.\frac{dr}{r}$$

فيكون:

أولاً: الخطأ النسبي

$$\frac{\Delta s}{s} = \frac{2.\Delta r}{r}$$

نعوض في معادلة حساب الأخطاء للحصول على القيمة العددية للخطأ النسبي فيكون

$$\frac{\Delta s}{s} = \frac{2 \times 0.001}{0.5} = 0.004$$

ثانياً: الخطأ النسبي المئوي

من عبارة الخطأ النسبي ΔS نضرب الطرفين بـ %

$$\frac{\Delta s}{s}\% = \frac{2.\Delta r}{r} \times 100$$

نعوض للحصول على القيمة العددية للخطأ النسبي المئوي فيكون

$$\frac{\Delta s}{s}\% = \frac{2 \times 0.001}{0.5} \times 100 = 4\%$$

ثالثاً: الخطأ المطلق

من عبارة الخطأ النسبي ΔS نحصل على الخطأ المطلق في حساب مساحة الدائرة

$$\Delta S = (2\frac{\Delta r}{r}) \times S$$

نعوض للحصول على القيمة العددية للخطأ النسبي المئوي فيكون

$$S = \pi . r^2 = \pi . 0.5^2 = 0.785375m^2$$

$$\Delta s = \left(2\frac{0.001}{0.5}\right) \times\ 0.785375 = 0.0031415$$

فتكون القيمة الفعلية لمساحة الدائرة هي $S_{\text{الفعلية}} = S_{\text{المقيسة}} \pm \Delta s$

$$\Rightarrow S_{\text{الحقيقية}} = 0.785375 \pm 0.0031415$$

تدريبات:

1- أوجد بالطريقتين التفاضلية واللوغاريتمية الخطأ النسبي والنسبي المئوي والمطلق المرتكب في حساب حجم متوازي مستطيلات أبعاده

$x = 8\ m, y = 4\ m, z = 2m$

علماً أن $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.01m$

2- أوجد بالطريقتين التفاضلية واللوغاريتمية الخطأ النسبي والنسبي المئوي والمطلق المرتكب في حساب حجم مكعب طول ضلعه $x = 8\ m$

علماً أن $\Delta x = 0.02\ m$

3- أوجد بالطريقتين التفاضلية واللوغاريتمية الخطأ النسبي والنسبي المئوي والمطلق المرتكب في حساب حجم أسطوانة نصف قطرها $r = 0.2\ m$ وارتفاعها $h = 0.8\ m$

علماً أن $\Delta r = \Delta h = 0.02\ m$

4- أوجد بالطريقتين التفاضلية واللوغاريتمية الخطأ النسبي والنسبي المئوي والمطلق المرتكب في حساب حجم نصف كرة نصف قطرها $r = 0.3\ m$ **علماً أن** $\Delta r = 0.02\ m$

5- أوجد بالطريقتين التفاضلية واللوغاريتمية الخطأ النسبي والنسبي المئوي والمطلق المرتكب في حساب مساحة مستطيل أبعاده

$x = 8\ m, y = 4\ m$

علماً أن $\Delta x = \Delta y = 0.01m$

6- أوجد بالطريقتين التفاضلية واللوغاريتمية الخطأ النسبي والنسبي المئوي والمطلق المرتكب في حساب دور النواس المرن فيه

$m = 0.8\ kg\ , k = 1.2 \times 10^{-2}\ N.m^{-1}$

علماً أن $\Delta m = 0.01m$ و $\Delta k = 0.02\ N.m^{-1}$

7- أوجد بالطريقتين التفاضلية واللوغاريتمية الخطأ النسبي والنسبي المئوي والمطلق المرتكب في حساب تدفق الجزيئات عبر أغشية الخلايا النباتية المعروف باسم قانون برنولي-هولدن لانتشار الجزيئات عبر الأغشية (الانتشار البسيط) والذي يُعطى بالعلاقة $J = -D.(\frac{dC}{dx})$

حيث أن: معامل الانتشار $D = 2.5 \times 10^{-9}\ m^2 s^{-1}$ وتدرج التركيز $\left(\frac{dC}{dx}\right) = 50\ mol.m^{-4}$

علماً أن $\Delta\left(\frac{dC}{dx}\right) = 0.01\ mol.m^{-4}$ و $\Delta D = 0.02\ m^2 s^{-1}$

8- أوجد بالطريقتين التفاضلية واللوغاريتمية الخطأ النسبي والنسبي المئوي والمطلق المرتكب في قياس مقاومة R عند تطبيق فرق كمون V بين طرفيها فيمر عبرها تيار شدته I

علماً أن $\Delta V = \Delta I = 0.01m$

9- أوجد بالطريقتين التفاضلية واللوغاريتمية الخطأ النسبي والنسبي المئوي والمطلق المرتكب في قياس المقدار $S = \frac{x}{y^2}$.

علماً أن $\Delta x = \Delta y = 0.01m$

التوفيق والنجاح الدائم