كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الاولى**

المادة : هندسة تحليلية

المحاضرة : الثالثة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

- وسطاء التوجيه للمتجه $\vec{u}$ وجيوب تمام التوجيه للمتجه $\vec{u}$:

إذا كان $\vec{u}$ متجهاً ما مركباته $\vec{u}(p,q,r)$ عندئذٍ نسمي p, q, r وسطاء التوجيه، بفرض α, β, γ زوايا بين المتجه $\vec{u}$ والمحاور الإحداثية ox, oy, oz على الترتيب

$$\alpha = (\vec{u}, \vec{i}) \quad , \quad \beta = (\vec{u}, \vec{j}) \quad , \quad \gamma = (\vec{u}, \vec{k})$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{i}}{\|\vec{u}\|.\|\vec{i}\|} = \frac{(p,q,r)\cdot(1,0,0)}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}\cdot 1} = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{j}}{\|\vec{u}\|.\|\vec{j}\|} = \frac{(p,q,r)\cdot(0,1,0)}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}\cdot 1} = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{u}\cdot\vec{k}}{\|\vec{u}\|.\|\vec{k}\|} = \frac{(p,q,r)\cdot(0,0,1)}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}\cdot 1} = \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

نسمي $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ جيوب تمام التوجيه للمتجه $\vec{u}$

ونسمي α, β, γ زوايا التوجيه للمتجه $\vec{u}$

* ملاحظة: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

* ملاحظة: اذا كان الفضاء ثنائي البعد عندئذٍ وسطاء التوجيه للمتجه $\vec{u}$ هي $\vec{u}(p,q)$، وجيوب تمام التوجيه

$$\cos\alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}} \quad , \quad \cos\beta = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}$$

مثال: أوجد وسطاء التوجيه للمنحى الذي يوازي المستوي oxy
ويعامد المنحى المعين بالمتجه $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$

الحل: نفرض وسطاء التوجيه $\vec{u}(p, q, r)$

يوازي oxy فإنه يعامد oz $\Leftarrow \vec{u}.\vec{k} = 0 \Leftarrow r = 0$

$\vec{u} . \vec{v} = 0$

$(2, -1, 1) . (p, q, r) = 0$

$2p - q + r = 0 \Rightarrow 2p - q = 0 \Rightarrow 2p = q$

نفرض $q = 1$ عندئذ $p = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \vec{u}\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$

جيوب تمام التوجيه:

$\cos\alpha = \dfrac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4}+1}} \quad , \cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+1}} \quad , \cos\gamma = 0$

مثال: عين وسطاء توجيه وجيوب تمام توجيه المنحى المعطى بالنقطتين

$M_1(1, 2, 3) \quad , M_2(0, 4, 0)$

الحل:

$\vec{u} = \overrightarrow{M_1M_2}$

وسطاء التوجيه: $(p, q, r) = (-1, 2, -3)$

جيوب تمام التوجيه: $\cos\alpha = \dfrac{-1}{\sqrt{14}} \quad , \cos\beta = \dfrac{2}{\sqrt{14}} \quad , \cos\gamma = \dfrac{-3}{\sqrt{14}}$

المستوي:

يتعين المستوي في الفراغ بثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة أو مستقيمين متوازيين (متقاطعين) أو بنقطة ومنحى.

ويعرف بأنه سطح غير محدود وإذا اشترك معه مستقيم بأكثر من نقطة انطبق عليه.

الطريقة الأولى :

معادلة مستوٍ يمر من نقطة معلومة ويعامد شعاع معلوم (الناظم)

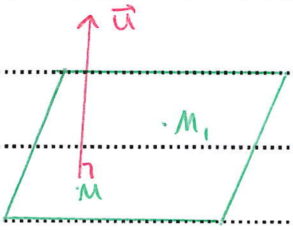
لتكن $M_1(x_1,y_1,z_1)$ و $\vec{u}(a,b,c)$ عندئذٍ معادلة مستوٍ

يمر من M_1 ويعامد $\vec{u}$ هي :

$$P: a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$$

أي $P: ax+by+cz+d=0 \;;\; d=-(ax_1+by_1+cz_1)$

وتسمى المعادلة التحليلية



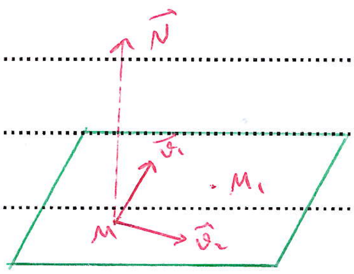
أما المعادلة المتجهية :

لتكن M نقطة ما من المستوي P

$$\vec{u}\cdot\overrightarrow{MM_1}=0$$

الطريقة الثانية :

معادلة مستوٍ يمر بنقطة معلومة ويوازي متجهين معلومين



لتكن $M(x,y,z)$ نقطة متحولة

في المستوي P المار من M_1 والموازي للمتجهين

$\vec{v}_1(p_1,q_1,r_1)$ ، $\vec{v}_2(p_2,q_2,r_2)$

عندئذٍ ترد هذه الحالة إلى الحالة الأولى باختيار

ناظم للمستوي، وذلك بملاحظة أن : $\vec{N}=\vec{v}_1\times\vec{v}_2$

بالتالي معادلة المستوي : $\overrightarrow{M_1M}\cdot\vec{N}=0$

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$$

$$\overrightarrow{M_1M}\cdot(\vec{v}_1\wedge\vec{v}_2)=(\vec{v}_1\wedge\vec{v}_2)\cdot\overrightarrow{M_1M}=(\overrightarrow{M_1M},\vec{v}_1,\vec{v}_2)=0$$

أي يمكن كتابة معادلة المستوي من نشر المحدد :

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0$$

مثال: اكتب معادلة مستوٍ مار من $M_1(3,4,-5)$ ويوازي
$\vec{v}_1(3,1,-1)$, $\vec{v}_2(1,-2,1)$

الحل:

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(1-2) - \vec{j}(3+1) + \vec{k}(-6-1) = -\vec{i} - 4\vec{j} - 7\vec{k}$$

$$= -1(x-3) - 4(y-4) - 7(z+5) = 0$$

$$= -x + 3 - 4y + 16 - 7z - 35 = 0$$

$$= -x - 4y - 7z - 16 = 0$$

طريقة ثانية:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z+5 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$= (x-3)(1-2) - (y-4)(3+1) + (z+5)(-6-1) = 0$$

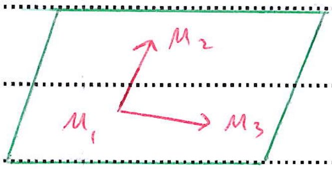
$$= -(x-3) - 4(y-4) - 7(z+5) = 0$$

الحالة الثالثة:

معادلة مستوي يمر من ثلاث نقاط:

لتكن M نقطة متحولة في المستوي P المار من النقط

$M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$



نرد هذه الحالة إلى الحالة السابقة

ملاحظات:

$\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ يوازيان المستوي P

أي نحصل على معادلة المستوي بنشر المحدد التالي:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

مثال: أوجد معادلة مستوي مار من النقط:

$M_1(3,-1,2)$, $M_2(4,-1,-1)$, $M_3(2,0,2)$

الحل:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$= 3x + 3y + z - 8 = 0$$

حالة خاصة:

معادلة تقاطع المستوي مع المحاور الاحداثية اذا كانت النقط

$M_1(x_1,0,0)$, $M_2(0,y_2,0)$, $M_3(0,0,z_3)$

تقع على المحاور الاحداثية ox , oy , oz

فإن معادلة مستوي يمر بـ M_1 , M_2 , M_3 :

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y & z \\ -x_1 & y_2 & 0 \\ -x_1 & 0 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$= y_2 z_3 x + x_1 z_3 y + x_1 y_2 z = x_1 y_2 z_3$$

نقسم الطرفين على $x_1 y_2 z_3$:

$$= \frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_2} + \frac{z}{z_3} = 1$$

وهي معادلة مستوي بدلالة الأجزاء المقطوعة من المحاور الإحداثية.

مثال : أوجد معادلة مستوي بدلالة الأجزاء المقطوعة من المحاور الإحداثية ، ثم اكتب تقاطعه مع المحاور

$$P: 2x + 4y + 3z - 12 = 0$$

الحل : نقسم على 12 :

$$\frac{2x}{12} + \frac{4y}{12} + \frac{3z}{12} = 1$$

معادلة المستوي بدلالة الأجزاء المقطوعة :

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$$

نقاط تقاطعه مع المحاور الإحداثية :

$(6,0,0)$, $(0,3,0)$, $(0,0,4)$

نتيجة : النقاط M_1 , M_2 , M_3 , M_4

واقعة في مستوٍ واحد إذا وفقط إذا تحقق :

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

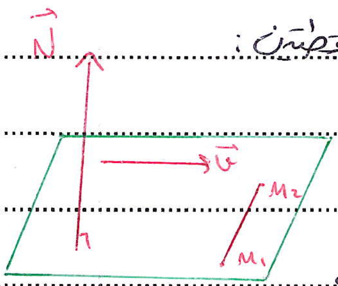
مثال : وظيفة بين فيما اذا كانت النقط

$M_1(-1,6,2)$, $M_2(3,0,1)$, $M_3(0,3,1)$, $M_4(1,2,-3)$

واقعة في مستوٍ واحد أم لا

الطريقة الرابعة :

معادلة مستوٍ مار من نقطتين معلومتين ويوازي متجه



- لتكن M نقطة متحولة في المستوي المار بالنقطتين :

$M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$

والموازي للمتجه $\vec{v}(p, q, r)$ ، لإيجاد معادلة المستوي

نرد هذه الحالة إلى الحالة السابقة وذلك بملاحظة أن

N عمودي على $\overrightarrow{M_1M_2}$ و $\vec{v}$ ، أو بنشر المحدد :

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ p & q & r \end{vmatrix} = 0$$

مثال : أوجد معادلة مستوٍ مار بـ $M_1(2, -1, 3)$, $M_2(3, 1, 2)$

والموازي للمتجه : $\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$

الحل : $x - y - z = 0$

– انتهت المحاضرة –