كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الاولى**

المادة : هندسة تحليلية

المحاضرة : الثانية/نظري/

القسم: الفيزياء
السنة: الأولى
المادة: هندسة تحليلية

الدكتور: ....
المحاضرة:
الثانية - نظري

التاريخ: / /

A to Z Library for university services

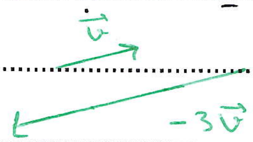
1) جداء متجه بعدد سلمي (جبري a):

جداء متجه بعدد سلمي (a) هو متجه جديد $\vec{u} = a\vec{v}$ وهو يساير $\vec{v}$

$$|\vec{u}| = |a|\,|\vec{v}|$$

إذا كان $a>0$ كان $\vec{u} = a\vec{v}$ بنفس اتجاه $\vec{v}$

إذا كان $a<0$ كان $\vec{u} = a\vec{v}$ يعاكس اتجاه $\vec{v}$



اذا توازى متجهان $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ كان:

(مرتبطان خطياً) $K \in R$; $\dfrac{\vec{v}_1}{\vec{v}_2} = K$ أو $\vec{v}_1 = K\vec{v}_2$

2) الجداء السلمي لمتجهين:

الجداء السلمي لمتجهين $\vec{v}_1 , \vec{v}_2$ هو العدد (المقدار السلمي) $\vec{v}_1 . \vec{v}_2$ وهو يساوي:

طويلة المتجه الأول x طويلة المتجه الثاني x تجيب الزاوية بينهما

$$\vec{v}_1 . \vec{v}_2 = |\vec{v}_1| . |\vec{v}_2| . \cos\theta \qquad ; \theta : (\vec{v}_1 , \vec{v}_2)$$

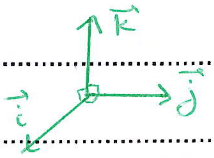
العبارة التحليلية للجداء السلمي:

$$\vec{v}_1 . \vec{v}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

حيث: $\vec{v}_1 (x_1 , y_1 , z_1)$
$\vec{v}_2 (x_2 , y_2 , z_2)$

يكون الجداء السلمي معدوماً عندما يتعامد $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ ، لأن:

$\vec{v}_1 . \vec{v}_2 = 0 \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + K\pi \quad ; K \in \mathbb{Z}$



نتائج: $\vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1$

$\vec{i}.\vec{j} = \vec{i}.\vec{k} = \vec{j}.\vec{k} = 0$

- خواص:

1) الجداء السلمي عملية تبديلية: $\vec{v}.\vec{u} = \vec{u}.\vec{v}$

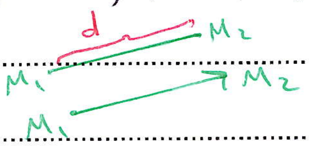
2) قابلية التوزيع على الجمع: $\vec{w}.(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{w}.\vec{u} + \vec{w}.\vec{v}$

3) $\forall \alpha,\beta \in R \Rightarrow (\alpha.\vec{u}).(\beta.\vec{v}) = \alpha.\beta\,(\vec{u}.\vec{v})$

4) $$\cos\theta = \frac{\vec{v}_1 . \vec{v}_2}{|\vec{v}_1| . |\vec{v}_2|}$$

- البعد بين نقطتين:

ليكن لدينا نقطتان: $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$



$d = |\overrightarrow{M_1M_2}|$

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$

مثال: لتكن النقاط:

$A(2,1,-1)$, $B(3,2,-1)$, $C(3,1,0)$

أوجد الزاوية بين المتجهين $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$

الحل:

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| . |\overrightarrow{AC}|}$$

$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = (1, 1, 0)$

$\overrightarrow{AC} = (1, 0, 1)$

$\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC} = 1 + 0 + 0 = 1$

$|\vec{AB}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $|\vec{AC}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

مثال: لتكن النقاط:

$A(3,3,0)$, $B(2,0,1)$, $C(1,1,1)$

أثبت أن ABC مثلث قائم في C

الحل: $\vec{CA}(2,2,-1)$, $\vec{CB}(1,-1,0)$

$\vec{CA}\cdot\vec{CB} = 2-2+0 = 0 \Rightarrow CA \perp CB$

$\therefore$ ABC قائم في C

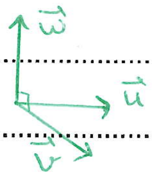
---

3) الجداء الخارجي لمتجهين:

ليكن $\vec{u}$, $\vec{v}$ متجهان في الفراغ، نرمز عادةً للجداء الخارجي بالرمز $(\times)$ أو $(\wedge)$،
وليكن $\vec{w}$ هو الشعاع الناتج عن الجداء الخارجي لـ $\vec{u}$ و $\vec{v}$

$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ أو $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$

وهو شعاع عمودي على كل من $\vec{u}$ و $\vec{v}$ (أو عمودي على المستوي المكون من الشعاعين $\vec{u}, \vec{v}$)



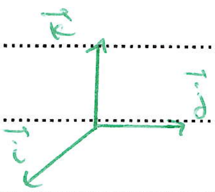
ويشكل معهم ثلاثية مباشرة (بعكس دوران عقارب الساعة)

طويلة:

$|\vec{w}| = |\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,\sin\theta$; $\theta(\vec{u},\vec{v})$

يكون $\vec{u} \times \vec{v} = 0$ إذا كان $\sin\theta = 0$ أي عندما $\theta : 0, \pi$

أي أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متوازيان



- من التعريف السابق نلاحظ أن:

$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$

$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \quad , \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \quad , \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$

خواص الجداء الخارجي للمجهيت:

1) $(\alpha \vec{u}) \wedge \vec{v} = \alpha (\vec{u} \wedge \vec{v})$

2) $(\alpha \vec{u} \wedge \beta \vec{v}) = (\alpha\beta)\ (\vec{u} \wedge \vec{v})$

3) إذا كانت $(\vec{u}, \vec{v}) = \theta$ فإن $(\vec{v}, \vec{u}) = -\theta$

$\vec{u} . \vec{v}$ عملية تبديلية لأن:

$\vec{u} . \vec{v} = \|\vec{u}\| . \|\vec{v}\| . \cos\theta$

$\vec{v} . \vec{u} = \|\vec{u}\| . \|\vec{v}\| . \cos(-\theta)$

$= \|\vec{u}\| . \|\vec{v}\| . \cos\theta = \vec{u} . \vec{v}$

أما الجداء الخارجي ليس تبديلي لأن:

$\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| . \|\vec{v}\| . \sin\theta$

$\vec{v} \wedge \vec{u} = \|\vec{u}\| . \|\vec{v}\| . \sin(-\theta) = -\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin\theta$

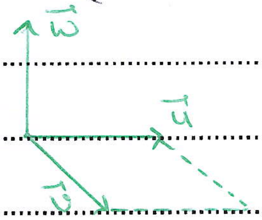
$\Rightarrow \vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$ ليس تبديلي

× ملاحظة: $\cos\theta = \cos(-\theta)$ و $\sin(-\theta) = -\sin\theta$

4) $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$

5) تمثل $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{w}|$

مساحة متوازي الأضلاع المنشأ على $\vec{u}$ و $\vec{v}$



في جملة إحداثيات قائمة ومباشرة فإن:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \vec{w}$$

$$= \vec{i}\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(y_u z_v - y_v z_u) - \vec{j}(x_u z_v - x_v z_u) + \vec{k}(x_u y_v - x_v y_u)$$

6) مطابقة لاغرانج:

$$(\vec{u}\wedge\vec{v})^2 + (\vec{u}.\vec{v})^2 = |\vec{u}|^2.|\vec{v}|^2$$

$$(|\vec{u}|.|\vec{v}|.\sin\theta)^2 + (|\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\theta)^2$$

$$= (|\vec{u}|^2.|\vec{v}|^2.\sin^2\theta) + (|\vec{u}|^2.|\vec{v}|^2.\cos^2\theta)$$

$$= |\vec{u}|^2.|\vec{v}|^2\,[\underbrace{\sin^2\theta + \cos^2\theta}_{1}] = |\vec{u}|^2.|\vec{v}|^2$$

7) يرتبط الجداء الخارجي مع الداخلي لثلاثة أشعة بالعلاقة:

$$(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w} = (\vec{u}.\vec{w}).\vec{v} - (\vec{v}.\vec{w}).\vec{u}$$

مثال: احسب مساحة متوازي الأضلاع المنشأ على $\vec{OA}$ ، $\vec{OB}$

$\vec{OA} = 2\vec{j} + \vec{k}$ ، $\vec{OB} = \vec{i} + 2\vec{k}$

الحل: $S = |\vec{OA} \times \vec{OB}|$

$$\vec{OA} \times \vec{OB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(4-0) - \vec{j}(-1) + \vec{k}(-2) = (4, 1, -2)$$

$$S = |\vec{OA} \times \vec{OB}| = \sqrt{16+1+4} = \sqrt{21}$$

مثال: احسب الجداء الخارجي للمتجهين $\vec{u}, \vec{v}$ في الحالتين:

1) $\vec{u} = 2\vec{i}$ ، $\vec{v} = 2\vec{k}$

2) $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ ، $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$

الحل:

1) $\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}(0) - \vec{j}(4) + \vec{k}(0) \Rightarrow \vec{u}\times\vec{v} = -4\vec{j}$

2) $\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(0) - \vec{j}(0) + \vec{k}(-1-1) \Rightarrow \vec{u}\times\vec{v} = -2\vec{k}$

---

4) الجداء المختلط لثلاث متجهات:

ليكن $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ثلاث متجهات في الفراغ نسمي العدد $\vec{w}.(\vec{u}\wedge\vec{v})$ الجداء المختلط للأشعة $\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}$ ونرمز له: $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

وهو يمثل حجم متوازي السطوح المنشأ على $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$

- خواص الجداء المختلط:

1) لا تتغير قيمة الجداء المختلط إذا بدلنا بين مواقع الأشعة تبديلاً دورياً:

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$

2) إذا بدلنا بين مواقع متجهين فقط فإن الجداء المختلط تتغير إشارته:

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = -(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}) = -(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}) = \dots$

3) إذا ضربنا أحد المتجهات بعدد فإن الجداء المختلط يضرب بهذا العدد

$(\alpha\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \alpha(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

* حالة خاصة: $(\alpha\vec{u}, \beta\vec{v}, \gamma\vec{w}) = \alpha\beta\gamma(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

4) الجداء المختلط يكون معدوماً إذا كان أحد الأشعة موازياً لمستوي واحد أو الأشعة واقعة في مستوٍ واحد

أو أحد الأشعة معدوماً.