كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الاولى

المادة : تحليل رياضي2

المحاضرة : الثالثة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

حساب التكاملات من الشكل: $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$

نستخدم الدستور التدريجي:

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n a^2}\left[(2n-1) I_n + \frac{x}{(x^2+a^2)^n}\right]$$

حيث: $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$

مثال: احسب:

$$I_3 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$$

الحل: $n+1=3 \Rightarrow n=2 \;,\; a=1$

$$I_3 = \frac{1}{4}\left[3 I_2 + \frac{x}{(x^2+1)^2}\right]$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\left[I_1 + \frac{x}{(x^2+1)}\right] \Rightarrow I_2 = \frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg} x + \frac{x}{(x^2+1)}\right]$$

$$I_3 = \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{3}{2}\frac{x}{(x^2+1)} + \frac{x}{(x^2+1)^2}\right]$$

تكامل الدوال الكسرية:

هي دالة من الشكل: $\frac{A(x)}{B(x)}$ ← كثير حدود / كثير حدود

1) $\deg(A(x)) \geq \deg(B(x))$ ← درجة

$$\Rightarrow \frac{A(x)}{B(x)} = H(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$$

$H(x)$ ← طناج ، $R(x)$ ← الباقي ، $B(x)$ ← مقسوم عليه

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

2) $\deg(A(x)) < \deg(B(x))$

نفرق الكسر $\frac{A(x)}{B(x)}$ إلى كسور بسيطة من الشكل:

$\frac{A}{x-a}$ ، $\frac{A}{(x-a)^k}$; $k=2,3,\dots$ ، $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$; $\Delta<0$

، $\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}$; $k=2,3,\dots$

مثال: اوجد: $I=\int \frac{x+1}{x^2+2x+5}\,dx$

$x^2+2x+5 \Rightarrow \Delta = 4-4(1)(5) = -16 < 0$

نتمم المقام إلى مربع كامل (بصيغة قانونية)

$x^2+2x+5 = x^2+2x+1+4 = (x+1)^2+4$

$I=\int \frac{x+1}{(x+1)^2+4}\,dx$ ، نفرض: $t = x+1$

$\Rightarrow dt = dx$

$I=\int \frac{t}{t^2+4}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+4}\,dt = \frac{1}{2}\ln|t^2+4|+C$

$= \frac{1}{2}\ln|(x+1)^2+4|+C$

طريقة تفريق الكسور:

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{A(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

$$= \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{x-b} + \frac{A_3}{x-c}$$

لإيجاد A_1, A_2, A_3

1) نوحد المقامات ونطابق بين البسطين

$x^n \longrightarrow x^n$

$x^{n-1} \longrightarrow x^{n-1}$

$x^0 \longrightarrow x^0$ / الحد الثابت /

(2 $A(x) = A_1(x-b)(x-c) + A_2(x-a)(x-c) + A_3(x-a)(x-b)$

لإيجاد: A_1 نعوض $x=a$

A_2 نعوض $x=b$

A_3 نعوض $x=c$

مثال:

$$I = \int \frac{x-1}{x^3-x^2-2x}\,dx$$

$$\frac{x-1}{x^3-x^2-2x} = \frac{x-1}{x(x^2-x-2)} = \frac{x-1}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}$$

$$= \frac{A(x^2-x-2) + B(x^2+x) + C(x^2-2x)}{x(x-2)(x+1)}$$

طريقة أولى:

$x-1 = (A+B+C)x^2 + (-A+B+2C)x - 2A$

$x^2 : 0 = A+B+C \quad \ldots (1)$

$x : 1 = -A+B-2C \quad \ldots (2)$

الحد الثابت: $-1 = -2A \Rightarrow A = \frac{1}{2} \quad \ldots (3)$

نعوض (3) في (1) و (2):

$$\left.\begin{aligned} B+C &= -\frac{1}{2} \\ B-2C &= \frac{3}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow 3C = -2 \Rightarrow C = -\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow B = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

طريقة ثانية:

$x-1 = A(x^2-x-2) + B(x^2+x) + C(x^2-2x)$

$A : x=0 \Rightarrow -1 = -2A + 0 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$B: x=2 \Rightarrow 1=6B \Rightarrow B=\frac{1}{6}$

$C: x=-1 \Rightarrow -2=3C \Rightarrow C=-\frac{2}{3}$

$$I=\int\left[\frac{1}{2}\frac{1}{x}+\frac{1}{6}\frac{1}{x-2}-\frac{2}{3}\frac{1}{x+1}\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x|+\frac{1}{6}\ln|x-2|-\frac{2}{3}\ln|x+1|+C$$

تفريق الكسور في حال الجذر مكرر:

$$\frac{A(x)}{(x-a)^n};\ n>1,2 = \frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(x-a)^n}$$

مثال: أوجد:

$$\int\frac{x-2}{x^3(x+1)^2}dx$$

$$\frac{x-2}{x^3(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x+1}+\frac{E}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{Ax^2(x+1)^2+Bx(x+1)^2+C(x+1)^2+Dx^3(x+1)+Ex^3}{x^3(x+1)^2}$$

$$x-2=A(x^4+2x^3+x^2)+B(x^3+2x^2+x)+C(x^2+2x+1)+D(x^4+x^3)+Ex^3$$

$x^4: 0=A+D$ ⟹ $C=-2$

$x^3: 0=2A+B+D+E$ $B=5$

$x^2: 0=A+2B+C$ $A=-8$

$x: 1=B+2C$ $D=8$

$x^0: -2=C$ $E=3$

$$\int\frac{x-2}{x^3(x+1)^2}dx=\int\left[\frac{-8}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{2}{x^3}+\frac{8}{x+1}+\frac{3}{(x+1)^2}\right]dx$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$= \int \left[-\frac{8}{x} + 5x^{-2} - 2x^{-3} + \frac{8}{x+1} + 3(x+1)^{-2} \right] dx$$

$$= -8\ln|x| - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} + 8\ln|x+1| + \frac{3}{x+1} + C$$

في حال المميز حقيقية: حالة 4:

$$\frac{ax^2+bx+c}{(a_1x^2+b_1x+c_1)\cdot(a_2x^2+b_2x+c_2)} = \frac{Ax+B}{a_1x^2+b_1x+c_1} + \frac{Cx+D}{a_2x^2+b_2x+c_2}$$

مثال: اوجد:

$$I: \int \frac{x+2}{(x^2+4)\cdot(x-3)}\, dx$$

$$\frac{x+2}{(x^2+4)\cdot(x-3)} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{C}{x-3}$$

$$= \frac{(Ax+B)(x-3) + C(x^2+4)}{(x^2+4)\cdot(x-3)}$$

$$= \frac{Ax^2 - 3Ax + Bx - 3B + Cx^2 + 4C}{(x^2+4)\cdot(x-3)}$$

$$x+2 = (A+C)x^2 + (-3A+B)x - 3B + 4C$$

x^2: $A + C = 0 \quad -(1)$ $\Rightarrow$ من (1): $C = -A$

x: $-3A + B = 1 \quad -(2)$

$-3B + 4C = 2 \quad -(3)$ $\Rightarrow$ نعوض في (3): $-3B - 4A = 2$

نضرب (2) $\Rightarrow$ (3):

$$\begin{array}{r} -9A + 3B = 3 \\ + \\ -4A - 3B = 2 \end{array} \Rightarrow -13A = 5 \Rightarrow A = -\frac{5}{13}$$

$$B = 1 + 3A = 1 - \frac{15}{13} = -\frac{2}{13}$$

$$C = -A = \frac{5}{13}$$

$$I=\int\left[\frac{-\frac{5}{13}x-\frac{2}{13}}{x^2+4}+\frac{\frac{5}{13}}{x-3}\right]dx$$

$$=\int\left[-\frac{5}{13}\frac{x}{x^2+4}-\frac{2}{13}\frac{1}{x^2+4}+\frac{5}{13}\frac{1}{x-3}\right]dx$$

$$=\frac{5}{26}\ln|x^2+4|-\frac{2}{13}\frac{1}{2}\arctg\frac{x}{2}+\frac{5}{13}\ln|x-3|+c$$

- في حالة المقام عدة عوامل مكررة : نفرق بين الحالتين السابقتين :

مثال : اوجد $I=\int\frac{x^2+x-1}{(x^2+1)^2}dx$

$$\frac{x^2+x-1}{(x^2+1)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

$$x^2+x-1=(Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)$$

$$=Ax^3+Ax+Bx^2+B+Cx+D$$

x^3 : $0=A$

x^2 : $1=B$

x : $1=A+C\Rightarrow C=1$

x^0 : $-1=B+D\Rightarrow D=-2$

$$I=\int\left[\frac{1}{(x^2+1)}+\frac{x-2}{(x^2+1)^2}\right]dx$$

$$I=\int\left[\frac{1}{x^2+1}+\frac{x}{(x^2+1)^2}-\frac{2}{(x^2+1)^2}\right]dx$$

① $\int\frac{1}{x^2+1}dx=\arctg x$

② $\int\frac{x}{(x^2+1)^2}dx$

TEL:0931497960 — مكتبة A to Z

نعوض: $t = x^2+1 \Rightarrow dt = 2x\,dx \Rightarrow x\,dx = \frac{1}{2}dt$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}dt}{t^2} = \frac{1}{2}\int t^{-2}dt = -\frac{1}{2}\frac{1}{t} = -\frac{1}{2(x^2+1)}$$

③ $\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx$ $\quad a=1,\ n=1$

$$= \frac{1}{2}\left[I_1 + \frac{x}{x^2+1}\right] = \frac{1}{2}\arctg x + \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}$$

$$I = \arctg x - \frac{1}{2(x^2+1)} - \arctg x - \frac{x}{x^2+1}$$

$$= -\frac{1}{2(x^2+1)} - \frac{x}{x^2+1} = \frac{-1-2x}{2(x^2+1)}$$

انتهت المسألة

TEL:0931497960 — مكتبة A to Z