كلية العلوم

القسم : **الكيمياء**

السنة : **الاولى**

المادة : فيزياء عامة2

المحاضرة : الثانية/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

الفصل الثالث

الحقل الكهربائي في الخلاء- قانون غوص

Electrical Field in Vacuum- Gausses Low

أظهرنا في الفصل السابق كيف يمكن حساب الحقل الكهربائي المتولد من توزع شحنة معطاة من قانون كولون، وسنقدم في هذا الفصل طريقة أخرى لحساب الحقول الكهربائية تعرف هذه الطريقة بقانون غوص.

يرتكز هذا القانون على حقيقة أن القوى الكهربائية الأساسية الساكنة بين الشحنات النقطية هي قانون التربيع العكسي للمسافة بين هذه الشحنات، وبالرغم من أن قانون غوص هو نتيجة لقانون كولون فإن قانون غوص يناسب أكثر في حساب الحقل الكهربائي لشحنات كهربائية ذات توزع عالي التناظر، بالإضافة إلى ذلك يساعد هذا القانون في فهم المسائل الأكثر تعقيداً.

٣-١ - التدفق الكهربائي *Electric Flux:*

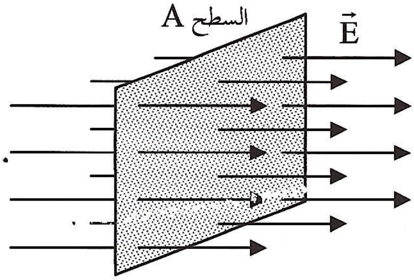
لقد شرح مفهوم خطوط الحقل الكهربائي على أساس كيفي (نوعي) في الفصل السابق، وسنستخدم الآن مفهوم التدفق الكهربائي لوضع القاعدة الكمية لهذه الفكرة.

يمثل التدفق الكهربائي بعدد خطوط الحقل الكهربائي التي تخترق سطحاً ما، فعندما يُخترق سطح ما من قبل خطوط الحقل الكهربائي الناتجة عن شحنة موجودة داخل هذا السطح فإن محصلة عدد خطوط الحقل التي تخترق هذا السطح تتناسب طرداً مع محصلة الشحنة الموجودة داخل هذا السطح، ولا يتعلق عدد خطوط الحقل بشكل السطح الذي يحيط بالشحنة، وهذا في الحقيقة يوصلنا إلى قانون غوص الذي سندرسه في القسم التالي.

لنأخذ أولاً حقلاً كهربائياً منتظماً في الشدة والاتجاه كما في الشكل (1-3)، تخترق خطوط الحقل الكهربائي سطح على شكل مربع مساحته A، عمودي على

الحقل. لنتذكر أن عدد خطوط الحقل يتناسب طرداً مع قيمة (شدة) الحقل الكهربائي وعليه فإن عدد خطوط الحقل التي تخترق السطح يتناسب طرداً مع الجداء E.A، ويدعى جداء شدة الحقل الكهربائي E بالسطح A العمودي على الحقل، بالتدفق الكهربائي Φ، أي أن:

$$\Phi = E \cdot A \qquad (3\text{-}1)$$



الشكل (1-3): خطوط حقل كهربائي منتظم تخترق سطحاً عمودياً.

من واحدات الجملة الدولية لـ A, E نجد أن واحدة التدفق الكهربائي هي $Nm^2/C = V\cdot m$.

إذا كان السطح المعتبر غير عمودي على الحقل، فإن عدد خطوط الحقل (أو بعبارة أخرى التدفق) التي تعبر السطح يجب أن يكون أقل من المعطى بالعلاقة (1-3)، ويمكن فهم هذا عند أخذ الشكل (2-3) حيث يصنع ناظم السطح A زاوية θ مع الحقل الكهربائي المنتظم. لاحظ أن عدد خطوط الحقل الذي يخترق هذا السطح مساوٍ لعدد خطوط الحقل الذي يخترق مساحة المسقط `A حيث `A عمودي على الحقل.

من الشكل (2-3) نجد أن المساحتين ترتبطان بالعلاقة:

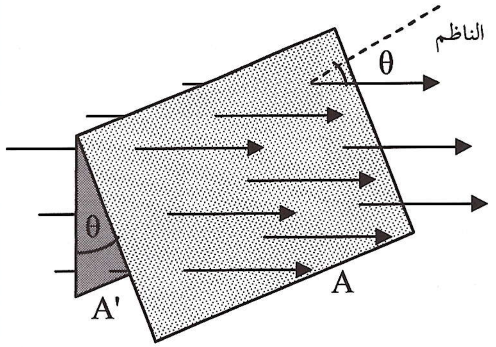
$$A` = A \cos\theta$$

بما أن التدفق خلال السطح A يساوي التدفق خلال السطح `A، نستنتج أن التدفق خلال السطح A يعطى بالعلاقة التالية:

$$\Phi = E \cdot A \cos\theta \qquad (3\text{-}2)$$

من هذه النتيجة نرى أن التدفق من خلال سطح يأخذ القيمة العظمى E.A عندما يكون السطح عمودياً على الحقل (وبعبارة أخرى عندما يكون ناظم السطح

موازياً للحقل وهذا يعني أن 0 = θ)، ويكون التدفق معدوماً عندما يكـــون الســـطح موازياً للحقل (عندما يكون ناظم السطح عمودياً على الحقل أي $\theta = 90^\circ$).

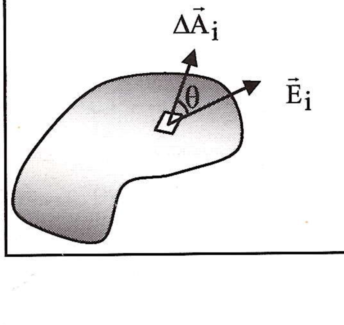


الشكل (2-3):
خطوط حقل كهربائي منتظم تخترق سـطحاً مائلاً عن الشاقول.

وبشكلٍ عام فإنه من الممكن أن يتغير الحقل الكهربائي من نقطة لأخرى علــى السطح، وعليه فإن تعريفنا للتدفق المعطى بالعلاقة (2-3)، له معنى فقط من أجل عنصر صغير من المساحة.

لنأخذ سطحاً ما مقسماً إلى عدد كبير من السطوح العنصرية الصغيرة مساحة كل منها ΔA. يمكن إهمال تغير الحقل الكهربائي فوق كل من هذه العناصر إذا كان السطح العنصري صغير بشكلٍ كافٍ، ومن المناسب تعريف الشعاع $\Delta\vec{A}_i$ علــى أن قيمته (طويلته) تمثل قيمة السطح العنصري ΔA_i بحيث يكون اتجاهه عموديــاً علــى السطح كما في الشكل (3-3)، وإذا اعتبرنا الحقل الكهربائي في مركز هذا الســطح العنصري $\vec{E}_i$ فإن التدفق الكهربائي $\Delta\Phi_i$ خلال السطح العنصري يعطــى بالعلاقــة التالية:

$$\Delta\Phi_i = E_i \, \Delta A_i \cos\theta = \vec{E}_i \, \Delta\vec{A}_i$$



الشكل (3-3):
الحقل كهربائي في مركز عنصر المساحة يصنع زاوية مع الناظم على عنصر المســاحة هــذا، وقيمة التدفق خلاله هي $\vec{E}_i \, \overrightarrow{\Delta A_i}$.

حيث استخدمنا هنا تعريف الجداء السلمي لشعاعين $\vec{A}.\vec{B} = A.B\cos\theta$، وبجمع مساهمات جميع عناصر السطح فإننا نحصل على التدفق الكلي خلال هذا السطح.

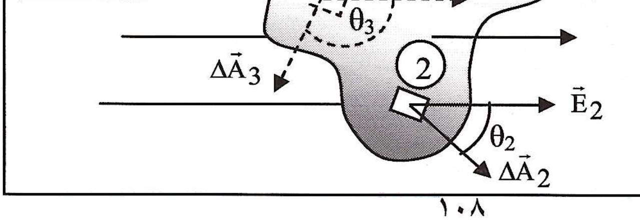
إن التدفق الكلي يعطى بمجموع عناصر التدفق على كامل السطح، وإذا جعلنا مساحة كل عنصر تتناهى إلى الصفر، وبالتالي يتناهى عدد العناصر إلى اللانهاية، يستبدل عندها المجموع بالتكامل، وعليه فإن التعريف العام للتدفق الكهربائي يعطى بالعلاقة التالية:

$$\Phi = \lim_{\Delta A_i \to 0} \sum \vec{E}_i \, \Delta\vec{A}_i = \int_{surface} \vec{E} \, .d\vec{A} \qquad (3\text{-}3)$$

العلاقة (3-3) هي تكامل سطحي، حيث يجب أن يتم هذا التكامل على سطح افتراضي، وتتعلق قيمته في الحالة العامة بكل من شكل الحقل ومواصفات السطح.

نهتم عادة بتعيين التدفق من خلال سطح مغلق (يعرف السطح المغلق من خلال تقسيم الفراغ إلى قطاع داخلي وقطاع خارجي، بحيث لا يمكن الحركة من قطاع لآخر دون اجتياز السطح. إن سطح الكرة هو على سبيل المثال سطح مغلق).

نأخذ السطح المغلق في الشكل (3-4)، لاحظ أن الأشعة $\Delta\vec{A}_i$ تأخذ اتجاهات مختلفة من أجل عناصر السطح المختلفة تكون هذه الأشعة ناظمية على السطح، واصطلاحاً تتجه نحو الخارج. على العناصر (1) ,(2) يتجه $\vec{E}$ نحو الخارج و$\theta<90$ لذلك يكون التدفق $\Delta\Phi = \vec{E}.\overrightarrow{\Delta A}$ خلال هذه العناصر موجباً. من أجل عناصر السطح مثل (3)، والتي تكون خطوط الحقل فيها موجهة نحو داخل السطح، وبالتالي $\theta>90$، يصبح التدفق سالباً لأن $\cos\theta$ سالب.



الشكل (3-4): سطح مغلق في حقل كهربائي يبين كيف تؤخذ عناصر السطح وأن التدفق يكون موجباً أو سالباً بحسب ما تكون $\theta<90$ أو $\theta>90$.

إن محصلة التدفق خلال هذا السطح تتناسب طرداً مع محصلة عدد الخطوط التي تخرج من السطح (حيث يقصد بمحصلة عدد الخطوط، عدد خطوط الحقل التي تغادر السطح مطروحاً منها عدد خطوط الحقل التي تدخل السطح)، فإذا كان هناك خطوط تخرج من السطح أكثر من تلك التي تدخله فإن التدفق موجب، أما إذا كان عدد الخطوط التي تدخل السطح أكثر من عدد الخطوط التي تخرج منه فإن التدفق سالب.

باستخدام الرمز $\oint$ لتمثيل تكامل على سطح مغلق، نستطيع كتابة محصلة التدفق Φ_C خلال سطح مغلق كما يلي:

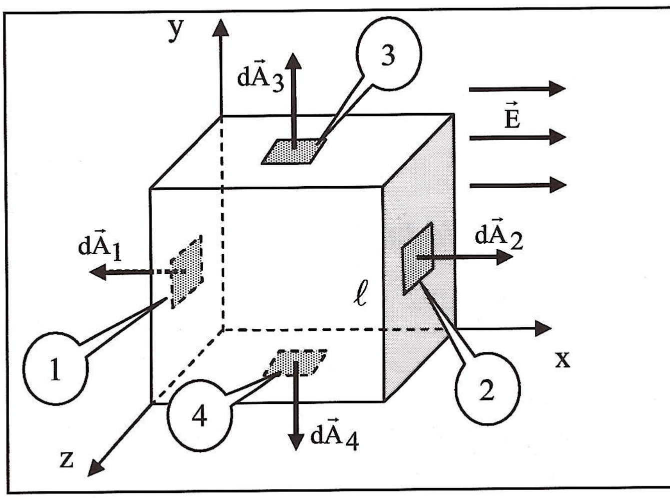
$$\Phi_c = \oint \vec{E}.\overrightarrow{dA} = \oint E_n dA \qquad (3\text{-}4)$$

حيث تمثل E_n مركبة الحقل الكهربائي العمودية على السطح، وتدل الدائرة الصغيرة فوق إشارة التكامل على أن السطح مغلق.

من الممكن أن يكون تعيين محصلة التدفق خلال سطح مغلق عملية شاقة جداً لكن إذا كان الحقل عمودياً على السطح في كل نقطة وثابت القيمة، فإنه يمكن إجراء الحساب مباشرة، والمثال التالي يوضح هذه النقطة.

مثال (٣-١):

نعتبر حقلاً كهربائياً $\vec{E}$ منتظماً وموجهاً باتجاه ox، أوجد محصلة التدفق الكهربائي خلال مكعب طول حرفه ℓ ومتوضع كما هو موضح في الشكل (5-3).



الشكل (5-3): سطح مغلق مكعب في حقل كهربائي منتظم مواز للمحور x. المحصلة الكلية للتدفق من خلال وجوه المكعب معدومة.

الحل:

يمكن تعيين التدفق كمجموع للتدفقات من خلال كل من وجــوه المكعــب، لاحظ أولاً أن التدفق من خلال أربعٍ من وجوه للمكعب معدوم، وهي الوجوه الثالث والرابع والخامس والسادس الموازية للحقل $\vec{E}$ العمودي على $d\vec{A}$ لهذه الوجوه. كما هو مبين في الشكل (3-5)، وعليه فإن $\theta = 90^o$ وبالتالي التدفق بالنسبة لكــل منــها يساوي:

$$\vec{E}.\overrightarrow{dA} = E.dA \cos 9\theta = 0$$

لنأخذ الآن الوجهين الأول والثاني فإن محصلة التدفق من خلال هذين الوجهين هي مجموع تكاملي الحقل عليهما:

$$\Phi_c = \int_1 \vec{E}.\overrightarrow{dA} + \int_2 \vec{E}.\overrightarrow{dA}$$

من أجل الوجه الأول يكون $\vec{E}$ ثابتاً، ويتجه نحو الداخل، بينما dA يتجه نحــو الخارج $(\theta = 180)$، واستناداً إلى ذلك نجد أن التدفق خلال هذا الوجه هو:

$$\int_1 \vec{E}.\overrightarrow{dA} = \int_1 E.dA \cos 180 = -E\int_1 dA = -EA = -E.\ell^2$$

لأن مساحة كل وجه هي $A = \ell^2$.

وبنفس الطريقة، من أجل الوجه الثاني يكون $\vec{E}$ ثابتاً، ويتجه نحو الخارج بنفس اتجاه $\overrightarrow{dA}$ أي أن $\theta = 0$ وعليه فإن التدفق خلال هذا الوجه هو:

$$\int_2 \vec{E}.\overrightarrow{dA} + \int_2 E.dA \cos 0 = E\int_2 dA = +EA = +E.\ell^2$$

وبالتالي فإن محصلة التدفق خلال جميع الوجوه تساوي الصفر لأن:

$$\Phi_c = -E\ell^2 + E\ell^2 = 0$$

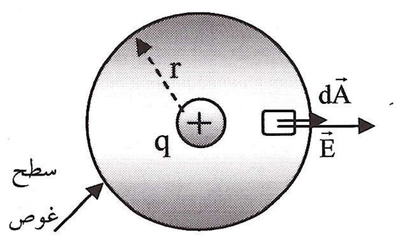
٣-٢ - قانون غوص *Gauss's Law:*

سنتحدث في هذه الفقرة عن علاقة عامة بين محصلة التدفق الكهربائي خــلال سطح مغلق (يسمى غالباً سطح غوص) والشحنة الموجودة داخل هذا السطح، تعرف هذه العلاقة بقانون غوص (Gauss's Law) وهي أساسية لدراسة الحقول الكهربائية.

نأخذ أولاً شحنة نقطية موجبة q موجودة في مركز كرة نصف قطرها r كما في الشكل (3-6)، نعلم من قانون كولون أن قيمة الحقل الكهربائي في أي موقع من سطح الكرة يعطى بالعلاقة:

$$E = k_e \frac{q}{r^2}$$

بالإضافة لذلك تكون خطوط الحقل قطرية متجهة نحو الخارج، وعمودية على سطح الكرة في أية نقطة من سطح الكرة، وهذا يعني أنه في أية نقطة من سطح الكرة فإن $\vec{E}$ يوازي الشعاع $\Delta\vec{A}_i$ الممثل للعنصر الموضعي الذي مساحته ΔA_i، وعليه نجد:



الشكل (3-6):
سطح غوص كروي تحيط بشحنة متمركزة معه، ولذلك فخطوط الحقل عمودية عليه في جميع نقاطه.

$$\vec{E}.\Delta\vec{A}_i = E_n\ \Delta A_i = E.\Delta A_i$$

ومن العلاقة (3-4) نجد أن محصلة التدفق خلال سطح غوص تعطى بالعلاقة:

$$\Phi_c = \oint \vec{E}_n . \overrightarrow{dA} = \oint E . dA = E . \oint dA$$

وبما أنه بالتناظر E ثابت في جميع نقاط سطح الكرة، وتعطى قيمته بالعلاقة $E = k_e \frac{q}{r^2}$ ، إضافةً إلى أن سطح غوص الكروي في هذه الحالة يعطى بمساحة سطح كرة وفقاً للعلاقة:

$$\oint \overrightarrow{dA} = A = 4\pi r^2$$

وعليه فإن محصلة التدفق من خلال سطح غوص هي:

$$\Phi_c = \frac{k_e q}{r^2}(4\pi r^2) = 4\pi k_e . q$$

وبالعودة إلى القيمة $k_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ نستطيع كتابة العبارة أعلاه بالشكل التالي:

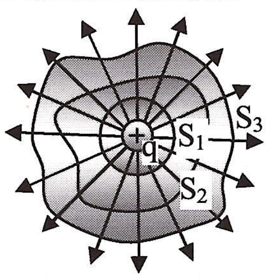
$$\Phi_c = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad (3\text{-}5)$$

لاحظ أن هذه النتيجة لا تتعلق بـــ r، ويمكن التعبير عنها كما يلي:

إن محصلة التدفق من خلال سطح غوص الكروي تتناسب طرداً مع الشحنة q الموجودة داخل هذا السطح.

والحقيقة أن التدفق هذا نتيجة لعلاقة الحقل مع مقلوب مربع المسافة المعطاة في قانون كولون، وهذا يعني أن قيمة E تتغير وفق $\frac{1}{r^2}$، لكن سطح الكرة يتغير وفـــق r^2 وباتحاد هذين المفعولين يؤدي إلى أن التدفق لا يتعلق بـــ r.

لنأخذ الآن عدة سطوح مغلقة تحيط بشحنة q كما في الشكل (3-7)، السطح S_1 سطح كروي، بينما السطحين S_2, S_3 غير كرويين، التدفق الذي يخترق S_1 لـــه القيمة $\frac{q}{\varepsilon_0}$. وكما ناقشنا في الفقرة السابقة يتناسب التدفق طرداً مع عـــدد خطـــوط الحقل التي تعبر خلال السطح.

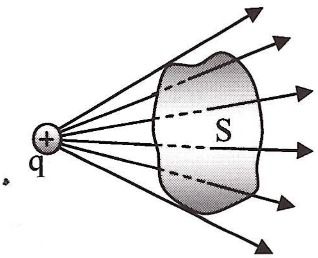


الشكل (3-7):
سطوح غوص مختلفة تحـيط بالشـحنة q، لاحـظ أن التدفق هو نفسه خلال كافـة السطوح.

يظهر الرسم في الشكل (3-7) أن عدد خطوط الحقل خلال السطح الكروي S_1 يساوي عدد خطوط خلال السطحين غير الكرويين S_2 ، S_3، وعليه فإنه من المنطقي استنتاج أن محصلة التدفق خلال أي سطح مغلق لا تتعلق بشـــكل هـــذا الســـطح.

(يستطيع الدارس إثبات أن هذه الحالة محققة عندما يكون $E \propto \frac{1}{r^2}$). وفي الحقيقة إن محصلة التدفق من خلال أي سطح مغلق يحيط بشحنة نقطية q يعطى بالعلاقة $\frac{q}{\varepsilon_0}$.

لنأخذ الآن شحنة نقطية متوضعة خارج سطح مغلق له شكل كيفي كما في الشكل (8-3)، يمكنك أن ترى من هذا الرسم بعض خطوط الحقل تدخل السطح، وأخرى تخرج من السطح، لكن عدد خطوط الحقل التي تدخل السطح يساوي عدد خطوط الحقل التي تخرج منه، وعليه يمكننا الاستنتاج أن محصلة التدفق خلال سطح مغلق، لا يحيط بأية شحنة يساوي الصفر.



الشكل (8-3):
سطح لا يحيط بالشحنة q، لاحظ أن التدفق معدوم، فخطوط الحقل تعبر السطح إلى الداخل من جهة وتخرج من الأخرى.

إذا طبقنا هذه النتيجة على المثال (٣-١) نستطيع بسهولة أن نرى أن محصلة التدفق خلال المكعب تساوي الصفر لأنه لا توجد شحنة داخله.

ولنتوسع الآن بهذه الأدلة إلى الحالة المعممة لشحنات نقطية متعددة أو لشحنة ذات توزع مستمر. نستطيع مرة أخرى استخدام مبدأ التراكب الذي ينص على أن الحقل الكهربائي المتعلق بعدة شحنات هو المجموع الشعاعي للحقول الكهربائية الناتجة عن الشحنات المفردة، وهذا يعني أنه يمكننا التعبير عن التدفق خلال سطح مغلق كما يلي:

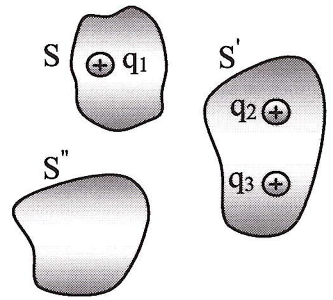
$$\oint \vec{E}.\overrightarrow{dA} = \oint (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3)\, d\vec{A}$$

حيث $\vec{E}$ هو الحقل الكهربائي الكلي في أية نقطة من السطح، و $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$ هي الحقول الكهربائية الناتجة عن الشحنات المفردة.

لنأخذ الآن جملة الشحنات الموضحة في الشكل (9-3)، يحيط السطح S بشحنة واحدة فقط هي q_1، وبالتالي محصلة التدفق خلال S هي $\frac{q_1}{\varepsilon_0}$. إن التدفق من خلال S المتعلق بالشحنات الواقعة خارجه يساوي الصفر لأن كل خط يدخل S في نقطة ما،

يخرج منه من نقطة أخرى، يحيط السطح `S بالشحنتين $q_2$ ,$q_3$، وتكون بالتالي محصلة التدفق خلال `S مساوية لـ $\frac{q_1+q_2}{\varepsilon_0}$.

وأخيراً إن محصلة التدفق من خلال ``S تساوي الصفر لأنه لا توجد أية شحنة داخل هذا السطح، وهذا يعني أن جميع خطوط الحقل التي تدخل ``S في نقطة ما، تخرج من هذا السطح من نقطة أخرى.



الشكل (3-9): تتعلق محصلة التدفق خلال سطح مغلق بقيمة الشحنة الموجودة بداخله فقط.

ينص قانون غوص الذي يعتبر تعميماً للمناقشة أعلاه، على أن محصلة التدفق خلال أي سطح مغلق هي:

$$\Phi_c = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \tag{3-6}$$

حيث تمثل q_{in} محصلة الشحنات الموجودة داخل السطح، وتمثل $\vec{E}$ الحقل الكهربائي في أية نقطة على السطح (مع الانتباه إلى أن قيمة وجهة الحقل متغيرتان، في الحالة العامة، مع تغير الموضع على السطح). ويمكن بالتالي التعبير عن نص قانون غوص كما يلي:

"محصلة التدفق الكهربائي خلال أي سطح مغلق تساوي إلى مجموع الشحنات الموجودة داخل هذا السطح مقسومة على ε_0".

الإثبات الرياضي (بالعلاقات) على قانون غوص موجود في الفقرة (٣-٦)، يجب أن نلاحظ أنه عند استخدام العلاقة (3-6) يجب ملاحظة أنه بالرغم من أن q_{in} تمثل مجموع الشحنات داخل سطح غوص فإن $\vec{E}$ التي تظهر في قانون غوص تمثل

الحقل الكهربائي الكلي الذي يتضمن مساهمات الشحنات داخل وخارج سطح غوص.

يمكن من حيث المبدأ، استخدام قانون غوص دائماً لحساب الحقل الكهربائي لجملة من الشحنات أو لتوزع مستمر من الشحنات. لكن عملياً هذه التقنية مفيدة فقط في عدد محدود من الحالات عندما تتضمن درجة عالية من انتظام الشحنات، كما سنرى في الفقرة التالية يمكن استخدام قانون غوص لتعيين الحقل الكهربائي لتوزع من الشحنات له تناظر كروي (توزع متناظر)، أو أسطواني أو مستوي. إذا تم اختيار سطح غوص المحيط بالشحنات بعناية فإنه يمكن تعيين قيمة التكامل الوارد في العلاقة (3-6) بسهولة. إذاً يجب ملاحظة أن سطح غوص هو سطح رياضي افتراضي لا حاجة لمطابقته أو مقارنته مع أي سطح فيزيائي حقيقي.

مثال (٣-٢):

إذا كانت محصلة التدفق خلال سطح غوص مساوية الصفر فأي من العبارات التالية صحيحة:

١. لا توجد أية شحنات داخل السطح.

٢. مجموع الشحنات داخل السطح تساوي الصفر.

٣. الحقل الكهربائي يساوي الصفر في أي مكان على السطح.

٤. عدد خطوط الحقل التي تدخل السطح يساوي عدد خطوط الحقل التي تخرج منه.

الحل:

العبارات (٢) و(٤) صحيحة، وينتج من قانون غوص أن العبارة (١) ليست بالضرورة صحيحة، لأن قانون غوص ينص على أن محصلة التدفق خلال أي سطح مغلق يساوي مجموع الشحنة داخل السطح مقسمة على ε_0، على سبيل المثال ثنائي الأقطاب الكهربائي (الذي مجموع شحنتيه يساوي الصفر)، ربما يكون موجوداً داخل السطح المغلق. العبارة (٣) ليست بالضرورة صحيحة، فبالرغم من أن محصلة التدفق

خلال سطح تساوي الصفر إلا أنه يمكن أن يكون الحقل الكهربائي غير مساوٍ للصفر في تلك المنطقة.

مثال (٣-٣):

يحيط سطح غوص بشحنة نقطية q، صف ماذا يحصل للتدفق الكلي خلال هذا السطح إذا:

١. تضاعفت الشحنة ثلاث مرات.

٢. إذا تضاعف حجم الكرة مرتين.

٣. تحول السطح إلى مكعب.

٤. غُيِّر موقع الشحنة إلى مكان آخر داخل السطح.

الحل:

١. عند تضاعف الشحنة ثلاث مرات سيتضاعف التدفق أيضاً ثلاث مرات لأن محصلة التدفق تتناسب طرداً مع الشحنة داخل السطح.

٢. التدفق يبقى ثابتاً عندما يتغير حجم سطح غوص، لأن هذا السطح يبقى بنفس مقدار الشحنة بغض النظر عن الحجم.

٣. لا يتغير التدفق الكلي عند تغير شكل السطح المغلق المحيط بالشحنات.

٤. التدفق الكلي خلال السطح المغلق عند حركة الشحنة إلى موقع آخر داخل هذا السطح يبقى ثابتاً.

يمكن الوصول إلى جميع هذه الاستنتاجات من خلال فهم قانون غوص.

٣-٣ - تطبيق قانون غوص على العوازل المشحونة

:Application of Gauss's law to charged ~~Insulators~~ Delectriecs

يفيد قانون غوص في الحالات التي يكون فيها درجة عالية من التناظر في توزع الشحنة كما في حالة الكرة والأسطوانات الطويلة والمستويات المسطحة الرقيقة المشحونة بشكل منتظم. في مثل هذه الحالات يمكن أخذ سطح غوص بسيط يمكن من

أجله تعيين التكامل السطحي المعطى بالعلاقة (3-6) بسهولة، يجب أن نختار السـطح دوماً بحيث يمكن الاستفادة من تناظر توزع الشحنة.

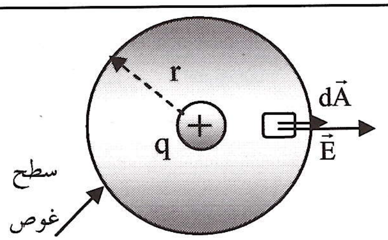
مثال (٣-٤):

انطلاقاً من قانون غوص، احسب الحقل الكهربائي لشحنة نقطية q معزولـة، وبين أن قانون كولون يستنتج من هذه النتيجة.

الحل:

من أجل هذه الحالة نختار سطح غوص كروي نصف قطره r، مركزه منطبق على الشحنة النقطية q كما في الشكل (3-10)، الحقل الكهربائي للشحنة النقطية الموجبة يتجه قطرياً وبشكل متناظر نحو الخارج، وبالتالي فهو عمودي على هذا السطح الكروي في كل نقطة وهذا يعني أن $\vec{E}$ موازٍ لـ $d\vec{A}$ في كل نقطة، وبالتالي $\vec{E} . d\vec{A} = E . dA$ وقانون غوص يعطى بالعلاقة:

$$\Phi_c = \oint \vec{E} . d\vec{A} = \oint E . dA = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



الشكل (3-10):
يؤخذ سطح غوص محيطاً بالشحنة النقطية ومتمركزاً معها.

وبالتناظر فإن E ثابت في كل مكان من السطح، وبالتالي يمكن إخراجه خارج إشارة التكامل، فيصبح القانون:

$$\Phi_c = \oint E . dA = E \oint dA = E\left(4\pi r^2\right) = \frac{q}{r^2}$$

حيث إن سطح الكرة هو $4\pi r^2$، وعليه فإن قيمة الحقل على مسافة r، من سطح الكرة هي:

$$E = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 r^2} = k_e \frac{q}{r^2}$$

إذا وضعت شحنة نقطية ثانية q_0 في نقطة، حيث قيمة الحقل E، فـإن القـوة الكهربائية المؤثرة على الشحنة q_0 تعطى بالعلاقة:

$$F = q_0\, E = k_e \frac{q\, q_0}{r^2}$$

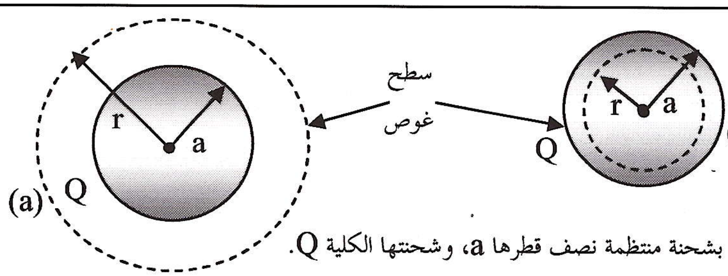
حصلنا سابقاً على قانون غوص من قانون كولون، وأظهرنا أعلاه أن قـانون كولون ينتج من قانون غوص، وبالتالي فهما متكافآن (ينتج كل منها عن الآخر).

مثال (٣-٥):

كرة معزولة نصف قطرها a، لها شحنة ذات كثافة حجمية منتظمة ρ، وشحنة كلية موجبة Q، الشكل (3-11). المطلوب:

١. احسب الحقل الكهربائي في نقطة واقعة خارج الكرة.

٢. أوجد قيمة الحقل الكهربائي في نقطة واقعة داخل هذه الكرة.



الشكل (3-11):

كرة معزولة مشحونة بشحنة منتظمة نصف قطرها a، وشحنتها الكلية Q.

(a) الحقل في نقطة واقعة خارج الكرة هو $k_e Q/r^2$.

(b) الحقل داخل الكرة يتعلق فقط بالشحنة داخل سطح غوص ويعطى بالعلاقة $k_e (Q/a^3) r$.

الحل:

١. بما أن توزع الشحنة ذو تناظر كروي، نختار سطح غوص عبارة عن كرة نصف قطرها r متمركزة مع الكرة الأساسـية، كمـا في الشـكل (3-11-a)، وبالمناقشة بنفس الطريقة في المثال (٣-٤) ينتج من أجل $r > a$ أن:

$$E = k_e \frac{Q}{r^2}$$

لاحظ أن هذه النتيجة مطابقة لما تم الحصول عليه من أجل شحنة نقطية، ونستنتج بالتالي أن الكرة المشحونة بشكل منتظم تكافئ شحنة نقطية متوضعة في مركز هذه الكرة.

٢. نختار في هذه الحالة سطح غوص سطحاً كروياً نصف قطره $r<a$ مركزه يقع على مركز الشحنة، الشكل (3-11-b)، نرمز لحجم الكرة الصغيرة بالرمز V'، لتطبيق قانون غوص في هذه الحالة من المهم التمييز أن الشحنة q_{in} داخل سطح غوص الذي حجمه V' هي من حيث المقدار أقل من الشحنة الكلية Q.

لحساب الشحنة q_{in} نستخدم حقيقة أن $q_{in} = \rho V'$، حيث أن ρ هي الشحنة في واحدة الحجم، وV' هي حجم مغلق بواسطة سطح غوص يعطى بالعلاقة $V' = \frac{4}{3}\pi r^3$ من أجل كرة ومنه نجد أن:

$$q_{in} = \rho V' = \rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$$

كما في المثال (٣-٤)، فإن قيمة الحقل الكهربائي تكون ثابتة في أي مكان من سطح غوص الكروي، واتجاهه عمودي على هذا السطح في أية نقطة، وعليه فإن قانون غوص في المنطقة التي يكون فيها $r < a$ يعطي مايلي:

$$\oint E \cdot dA = E\oint dA = E\left(4\pi r^2\right) = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

بالحل من أجل E ينتج:

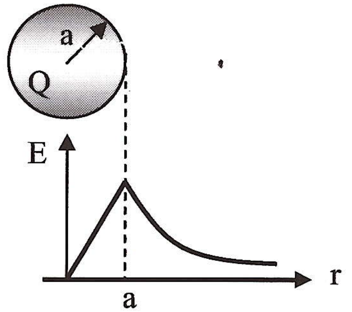
$$E = \frac{q_{in}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho\frac{4}{3}\pi r^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$$

بما أن ρ تعرف بالعلاقة $\rho = \dfrac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^2}$ فإنه يمكن كتابة العلاقة أعلاه كما يلي:

من أجل $r<a$ يكون:

$$E = \frac{Q r}{4\pi\varepsilon_0 a^3} = k_e \frac{Q}{a^3} r$$

لاحظ أن هذه النتيجة من أجل E تختلف عن تلك التي تم الحصول عليهـــا في الطلب (١)، وهذا يظهر أن $E \to 0$ عندما $r \to 0$، كما يمكن أن يخمن المرء استناداً إلى التناظر الكروي للشحنة. وعليه تزيل هذه النتيجة الاستغراب التي يجب أن يحصل عندما E تتغير مع $\frac{1}{r^2}$ داخل الكرة، أي أن $E \propto \frac{1}{r^2}$، إذ يجب أن يكـــون الحقـــل لانهائياً عندما $r = 0$، ومن الواضح أن هذا الأمر غير ممكن فيزيائياً. ويبين الشكل (3-12) مخططاً بيانياً لـــ E بتابعية r.



الشكل (3-12):
مخطط بياني لـــ E بتابعية r، من أجـــل عازل كروي مشحون بشـــكل منـــتظم. الحقل داخل الكرة (r<a) يتغير خطياً مع r، الحقل خارج الكرة (r>a) يماثل حالة الشحنة نقطية Q متوضعة في المبدأ.

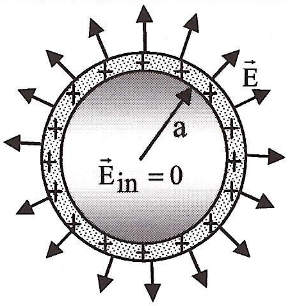
مثال (٣-٦):

قشرة كروية نصف قطرها a، موزع على سطحها بانتظام شحنة قيمتها الكلية Q، الشكل (3-13)، أوجد الحقل الكهربائي في نقطة داخل هذه القشرة الكروية، وفي نقطة خارجها.

الحل:

حساب الحقل خارج الكرة مطابقة تماماً لذلك الذي قمنا به في المثال (٣-٥)، إذا أنشأنا سطح غوص عبارة عن سطح كرة نصف قطرها r>a متمركزة مع القشرة الكروية، فتكون بالتالي قيمة الشحنة داخل سطح غوص الكروي هـــي Q، ويكـــون بالتالي الحقل في نقطة خارج القشرة يكون مكافئاً لذلك المتولد عن شـــحنة نقطيـــة متوضعة في مركز القشرة أي أن قيمة الحقل خارج الكرة في النقطة التي تبعد r عـــن المركز هي من أجل r>a تساوي:

$$E = k_e \frac{Q}{r^2}$$



الشكل (13-3):
الحقل الكهربائي داخل قشرة كروية مشحونة بانتظام معدوم، في حين يكون خارجها مماثل لذاك المتولد عن شحنة نقطية مساوية لشحنة القشرة الكلية.

الحقل الكهربائي داخل القشرة الكروية يساوي الصفر، وينتج هذا أيضاً من تطبيق قانون غوص على سطح كروي نصف قطره $r>a$ لأن محصلة الشحنات داخل هذا السطح تساوي الصفر، وبسبب التوزع المتناظر للشحنة. أي أن $E = 0$ عندما $r<a$.

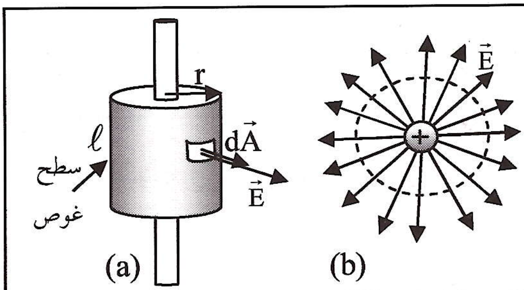
يمكننا الحصول على نفس النتيجة باستخدام قانون كولون والمكاملة على الشحنة، لكن هذا الحساب معقد لذلك سنهمله.

مثال (٣-٧):

أوجد الحقل الكهربائي على بعد r من شحنة خطية منتظمة وموجبة وطولها لانهائي، قيمة الشحنة في واحدة الطول هي λ، الشكل (14-3).

الحل:

يظهر تناظر الشحنة أنه يجب أن تكون E عمودية على الخط المشحون وموجهة نحو الخارج كما في الشكل (3-14-a).



الشكل (14-3):
شحنة خطية لا نهائية محاطة بسطح غوص أسطواني متمحور معها (a)، وشكل تخطيطي يبين أن الحقل ثابت القيمة وعمودي عليها (b).

ويوضح الشكل (3-14-b) شكلاً تخطيطاً للشحنة الخطية، يساعد في إظهار اتجاهات خطوط الحقل، وفي هذه الحالة نختار سطح غوص عبارة عن أسطوانة نصف قطرها r، وارتفاعها ℓ وتتمحور مع الشحنة الخطية، من أجل السطح الجانبي المنحني، تكون $\vec{E}$ ثابتة القيمة وعمودية على هذا السطح في كل نقطة، بالإضافة إلى ذلك فإن التدفق من خلال قاعدتي الأسطوانة (نهايتي سطح غوص) يساوي الصفر لأن $\vec{E}$ موازٍ لهاتين القاعدتين.

الشحنة الكلية داخل سطح غوص هي $\lambda\ell$، وبتطبيق قانون غوص مع الأخذ بالاعتبار أن $\vec{E}$ موازٍ لـ $d\vec{A}$ في كل موضع من السطح الجانبي للأسطوانة نجد أن:

$$\Phi_c = \oint \vec{E}.d\vec{A} = E\oint dA = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda\ell}{\varepsilon_0}$$

لكن السطح الجانبي (المنحني) للأسطوانة هو $2\pi r\ell$ وبالتالي تصبح العلاقة الأخيرة كما يلي:

$$E(2\pi r\ell) = \frac{\lambda\ell}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0} = 2k_e\frac{\lambda}{r} \qquad (3\text{-}7)$$

وعليه نرى أن الحقل الكهربائي الناتج عن شحنة ذات تناظر أسطواني يتغير وفق $\frac{1}{r}$ وبالمقابل يتغير الحقل الكهربائي خارج شحنة ذات تناظر كروي وفق $\frac{1}{r^2}$، ومن الممكن استنتاج العلاقة أيضاً باستخدام قانون كولون والمكاملة لكن التقنيات الرياضية الضرورية من أجل ذلك أعقد بكثير مقارنة مع قانون غوص.

إذا كانت الشحنة الخطية محدودة الطول، فإن قيمة $\vec{E}$ لا تعطى بالعلاقة (3-7) أي أن هذه العلاقة غير صالحة لحساب قيمة $\vec{E}$ في هذه الحالة. أما من أجل النقاط القريبة من هذه الشحنة الخطية والبعيدة عن النهايتين فإن العلاقة (3-7) ذات دقة جيدة لحساب قيم الحقل.

وهكذا نستنتج أن قانون غوص غير مفيد في حساب $\vec{E}$ لشحنة خطية محدودة الطول، والسبب في ذلك هو أن قيمة $\vec{E}$ لا تبقى ثابتة على سطح غوص الأسطواني.

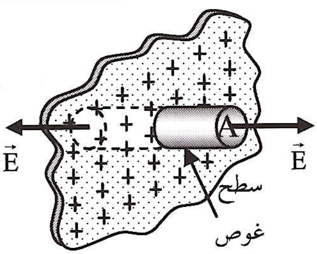
بالإضافة إلى ذلك فإن $\vec{E}$ لا تكون عمودية على السطح الأسطواني في جميع النقاط عندما يكون هناك تناظر محدود في توزع الشحنة كما في هذه الحالة (حالة شحنة خطية محدودة الطول)، فإنه من الضروري استخدام قانون كولون لحساب قيمة $\vec{E}$، ويمكن الإثبات أن الحقل الكهربائي $\vec{E}$ داخل قضيب يحمل شحنة منتظمة وسماكته محدودة، يتناسب طرداً مع r (بعد النقطة).

مثال (٣-٨):

أوجد الحقل الكهربائي لمستوٍ رقيق غير محدود، وغير ناقل موزع عليه شحنة بكثافة سطحية منتظمة σ.

الحل:

يظهر تناظر هذه الحالة أن $\vec{E}$ يجب أن يكون عمودياً على المستوي وأن اتجاه $\vec{E}$ في أحد وجوه المستوي يجب أن يكون معاكساً لاتجاهه على الوجه الآخر كما في الشكل (3-15).



الشكل (3-15):
شحنة مستوية لا نهائية يخترقها سطح غوص أسطواني، التدفق معدوم عبر محيط الأسطوانة، ويساوي EA عبر قاعدتيها.

من المناسب هنا اختيار سطح غوص على شكل أسطوانة صغيرة محورها عمودي على المستوي، ونهايتاها اللتان مساحة كل منهما A متساويتا البعد عن المستوي. وبما أن $\vec{E}$ موازٍ للسطح الأسطواني (الجانبي) نرى أنه لا يوجد تدفق من خلال هذا السطح. التدفق الخارج من كل من قاعدتي الأسطوانة هو E.A (لأن $\vec{E}$ عمودي على كل منهما)، لذلك فإن التدفق الكلي من خلال سطح غوص هو 2EA.

بملاحظة أن الشحنة الكلية داخل سطح غوص هي σA فاستخدام قانون غوص يعطي مايلي:

$$\Phi_c = 2EA = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \tag{3-8}$$

بما أن بعد نهايتي الأسطوانة لا يظهر في العلاقة (3-8)، نستنتج أن $E = \sigma / 2\varepsilon_0$ على أية مسافة من المستوي، وهذا يعني بأن الحقل منتظم في أي موضع.

هناك حالة هامة جداً ترتبط بهذا المثال هو حالة مستويين متوازيين مشحونين بكثافة سطحية مقدارها σ على أحدهما، و σ- على الآخر، وفي هذه الحالة يكون الحقل الكهربائي بينهما هو $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ ويكون تقريباً صفر في أي منطقة أخرى، هذه الحالة هي حالة المكثفة.

مثال (٣-٩):

اشرح لماذا لا يمكن استخدام قانون غوص في الحالات التالية:

١. حالة ثنائي أقطاب كهربائي.

٢. حالة قرص مشحون.

٣. حالة ثلاث شحنات نقطية متوضعة على رؤوس مثلث.

الحل:

أشكال الحقل الكهربائي لكل من هذه التشكيلات الثلاث لا تملك تناظر كافٍ لإجراء الحسابات عملياً، فمن المفيد استخدام قانون غوص في حساب الحقل الكهربائي فقط من أجل الشحنات ذات التوزع عالي التناظر كالشحنة الكروية المنتظمة والشحنة الأسطوانية والشحنة المستوية الرقيقة).

من أجل تطبيق قانون غوص يجب أن تتوفر الإمكانية لإيجاد سطح مغلق يحيط بالشحنة، ويمكن تقسيمه بحيث يكون الحقل فوق كل منطقة من هذا السطح ثابتاً. ومثل هذا السطح لا يمكن تشكيله من أجل هذه الحالات الثلاث.

٣-٤- النواقل في التوازن الكهربائي الساكن

Conductors in Electrostatics Equilibrium:

كما درسنا في الفقرة (٢-٢) يحوي الناقل الكهربائي الجيد شحنات (إلكترونات) غير مرتبطة بأية ذرة وهي حرة الحركة داخل المادة.

يكون الناقل في حالة توازن كهربائي ساكن وكما سنرى تملك النواقل الموجودة في حالة التوازن الكهربائي الساكن الخصائص التالية:

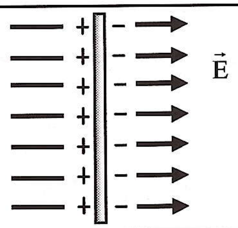
١. يكون الحقل الكهربائي مساوياً للصفر في أي موضع داخل الناقل.

٢. أية شحنة في ناقل معزول تنتقل إلى سطحه.

٣. يكون الحقل الكهربائي في الجوار المباشر للناقل المشحون عمودياً على سطح هذا الناقل وقيمته $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ حيث σ الكثافة السطحية وهي قيمة الشحنة في واحدة السطح في تلك النقطة.

٤. على أي ناقل ذو شكل غير منتظم تميل الشحنات للتوضع على المناطق من السطح ذات نصف قطر الانحناء الأقل وهذا يعني في النقاط الأكثر تحدباً.

يمكن فهم الخاصة الأولى عن طريق أخذ لوح ناقل موضوع في حقل خارجي $\vec{E}$ الشكل (3-16)، عند التوازن الكهربائي الساكن يجب أن يكون الحقل داخل الناقل مساوياً للصفر، وإذا فرضنا مؤقتاً أن هذا الأمر غير صحيح أي يوجد حقل غير معدوم فإن ذلك سيؤدي إلى حركة الشحنات بصورة متسارعة تحت تأثير هذا الحقل وهذا يناقض كون الشحنة ساكنة.



الشكل (3-16):
تتولد في لوح ناقل موضوع في حقل كهربائي شحن متحرضة موجبة وسالبة على وجهيه، ويكون الحقل داخله معدوماً.

قبل تطبيق الحقل الكهربائي الخارجي ستتوزع الإلكترونات على كامل الناقل، وعند تطبيق الحقل الخارجي تتسارع الإلكترونات نحو اليسار مسببة توضع شحنات

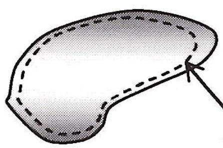
سالبة على الوجه اليساري (زيادة في الإلكترونات). وتوزع شحنات موجبة على الوجه اليميني (حيث تكون الإلكترونات قد هجرت المكان وخلفت شحنات موجبة). تولد هذه الشحنات حقلاً كهربائياً خاصاً بها يكون معاكساً للحقل الكهربائي الخارجي.

تتزايد كثافة الشحنات السطحية حتى تصبح قيمة الحقل الداخلي مساوية لقيمة الحقل الخارجي وبما أنهما متعاكسان فإن المحصلة داخل الناقل تكون مساوية للصفر.

في النواقل الجيدة يتطلب التوازن السابق زمناً مقداره $10^{-16}s$، وهذا الزمن يمكن اعتباره في معظم الحالات مهمل أي أن التوازن يحصل بشكل آني تقريباً.

نستطيع استخدام قانون غوص للتحقق من الخاصتين الثانية والثالثة لناقل في حالة توازن كهربائي ساكن، ويظهر الشكل (3-17) ناقلاً معزولاً ذا شكل عشوائي، وسطح غوص مرسوم داخل هذا الناقل ويمكن اعتبار هذا السطح قريباً من سطح الناقل بالدرجة التي نرغب بها.

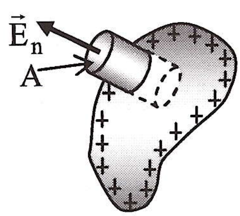
الشكل (3-17):
يمثل الخط المنقط سطح غوص داخل ناقل عشوائي الشكل.



وكما رأينا أعلاه يكون الحقل الكهربائي في أية نقطة داخل الناقل مساوياً للصفر عندما ما يكون هذا الناقل في حالة توازن كهربائي ساكن، وعليه فإن الحقل الكهربائي يجب أن يكون مساوياً للصفر في أية نقطة من سطح غوص، وبالتالي تكون محصلة التدفق خلال سطح غوص مساوية للصفر.

من هذه النتيجة ومن قانون غوص نستنتج أن محصلة الشحنات داخل سطح غوص تكون مساوية للصفر. وبما أنه لا يمكن أن يكون هناك محصلة شحنة داخل سطح غوص (الذي يمكن أن يكون قربه كبيراً من سطح الناقل)، فإن محصلة شحنة على الناقل يجب أن تنتقل إلى سطحه.

لا يشرح لنا قانون غوص كيف تتوزع هذه الشحنات الزائدة على السطح. سنثبت في الفقرة (٤-٦) الخاصة الرابعة لناقل في حالة توازن كهربائي ساكن. نستطيع استخدام قانون غوص لربط الحقل الكهربائي خارج سطح الناقل الموجود في حالة توازن كهربائي ساكن، مع توزع الشحنة على هذا الناقل، ومن أجل القيام بذلك فإنه من المناسب رسم سطح غوص على شكل أسطوانة صغيرة قاعدتاها موازيتان للسطح الناقل كما في الشكل (3-18)، جزء من الأسطوانة يقع خارج الناقل والجزء الآخر داخله.



الشكل (3-18):
يستخدم سطح غوص على شكل أسطوانة صغيرة لحساب الحقل الكهربائي في جوار ناقل مشحون، الحقل داخل الناقل معدوم، والتدفق من خلال سطح غوص يساوي $E_n.A$.

لا يوجد تدفق من خلال قاعدة الأسطوانة الواقعة داخل الناقل لأن $\vec{E}=0$ داخل الناقل. بالإضافة لذلك فإن الحقل عمودي على السطح. إذا كان للحقل $\vec{E}$ مركبة مماسية على السطح فإنها ستُحرك الشحنات الحرة على طول السطح مولدة بذلك تياراً كهربائياً، وهذا يناقض كون الناقل في حالة توازن كهربائي ساكن.

وبالتالي لا يوجد تدفق من خلال السطح الجانبي (المنحني) للأسطوانة لأن $\vec{E}$ مماس له، لذلك فإن محصلة التدفق خلال سطح غوص هي E_nA، حيث E_n الحقل الكهربائي في الجوار المباشر لسطح الناقل، ويعطي تطبيق قانون غوص على هذا السطح ما يلي:

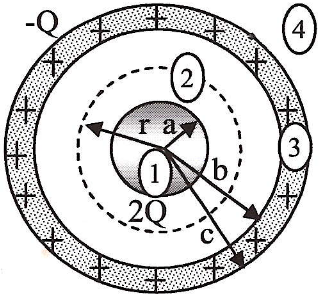
$$\Phi_c = \oint E_n \, dA = E_n . A = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma.A}{\varepsilon_0}$$

استخدمنا هنا حقيقة أن الشحنة داخل سطح غوص هي $q_{in}=\sigma A$، حيث A هي مساحة قاعدة الأسطوانة، و σ هي كثافة الشحنة السطحية (يمكن أن تكون الكثافة متغيرة من موضع لآخر) وبحل العلاقة السابقة من أجل E_n نجد ما يلي:

$$E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad (3\text{-}9)$$

مثال (٣–١٠):

كرة ناقلة مصمتة نصف قطرها a، ولها شحنة موجبة مقدارها 2Q، الشكل (3-19)، وتتمركز مع هذه الكرة قشرة كروية ناقلة نصف قطرها الداخلي b، ونصف قطرها الخارجي c، وتحمل شحنة مقدارها Q-، أوجد باستخدام قانون غوص الحقل الكهربائي في المناطق المحددة بـ (1), (2), (3), (4) وأوجد توزع الشحنة على القشرة الكروية.



الشكل (3-19): كرة ناقلة مصمتة شحنتها 2Q محاطة بقشرة كروية ناقلة شحنتها Q-.

الحل:

لاحظ أولاً أن توزع الشحنة على كل من الكرتين له تناظر كروي لأنهما متمركزتان.

لتعيين الحقل الكهربائي على مسافات مختلفة r عن المركز، ننشئ سطح غوص الكروي الذي نصف قطره r. لتعيين الحقل الكهربائي داخل الكرة المصمتة التي نصف قطرها a ،القطاع (1)، نأخذ سطح غوص نصف قطره r حيث r<a، بما أنه لا يمكن أن يوجد شحنة داخل الناقل في حالة التوازن الكهربائي الساكن، نجد أن $q_{in}=0$، وعليه فمن قانون غوص ومن التناظر نجد أن $E_1=0$ من أجل r<a، ونستنتج بالتالي أن محصلة الشحنة 2Q على الكرة المصمتة تتوزع على السطح الخارجي.

في القطاع (2) بين الكرتين حيث a<r<b، نشكل سطح غوص الذي نصف قطره r مع ملاحظة أن الشحنة داخل هذا السطح هي 2Q+ (الشحنة على الكرة

الداخلية). وبما أنه يوجد تناظر كروي فإن خطوط الحقل الكهربائي تخـرج قطريـاً وتتجه نحو الخارج، وتكون قيمتها ثابتة على سطح غوص، باستخدام نتيجة المثـال (3-4)، وقانون غوص نجد أن:

$$E_2 . A = E_2 (4\pi r^2) = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{2Q}{\varepsilon_0}$$

$$E_2 = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{2k_e Q}{r^2} \qquad (a<r<b \text{ من أجل})$$

في القطاع (4) حيث $r>c$ يحيط سطح غوص الكروي بالشحنة الكلية، وهـذا يؤدي إلى أن $q_{in} = 2Q + (-Q) = Q$، ويعطي بالتالي تطبيق قانون غوص على هـذا السطح ما يلي:

$$E_4 = \frac{k_e Q}{r^2} \qquad (r>c \text{ من أجل})$$

وأخيراً نأخذ القطاع (3) حيث $b<r<c$ وفيه يجب أن يكون الحقل الكهربـائي مساوياً للصفر لأن القشرة الكروية هي أيضاً عبارة عن ناقل في حالة توازن كهربائي ساكن.

إذا شكلنا سطح غوص الذي له هذا نصف القطر $b<r<c$، نرى أن q_{in} يجب أن تساوي الصفر لأن $E_3=0$، ونستنتج من ذلك أن الشحنة الموجودة على الوجه الداخلي للقشرة الكروية يجب أن تساوي $-2Q$ لتتفانى مع الشحنة $+2Q$ على الكرة المصـمتة (الشحنة $-2Q$ هي شحنة محرضة من قبل الشحنة $+2Q$ الموجودة على الكرة الداخلية)، بالإضافة لذلك بما أن محصلة الشحنات على القشرة الكروية هي $-Q$ نستنتج أنه يجب أن يكون على السطح الخارجي للقشرة شحنة مساوية $+Q$.

٣-٥- إثبات تجريبي على قانون غوص وقانون كولون

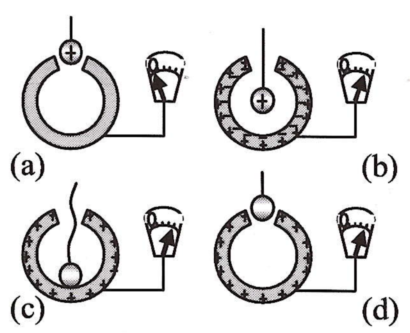
:Experimental Proof of Gauss's law & Coulomb's law

عند شحن ناقل، فإن الشحنة تتوزع على سطحه بطريقة يكون معها الحقـل داخل هذا الناقل يساوي الصفر.

بما أن الحقل داخل الناقل في حالة التوازن الكهربائي يساوي الصفر، فإن قانون غوص يظهر أنه لا يمكن أن يكون هناك شحنات داخل الناقل، رأينا أن قانون غوص هو نتيجة لقانون كولون المثال (3-4). لذلك يمكن اختبار صلاحية قوة كولون مع مقلوب مربع المسافة عن طريق محاولة اكتشاف محصلة الشحنة داخل الناقل، فإذا تم اكتشاف أي شحنة في أي مكان ما عدا سطح الناقل (أي داخل الناقل). فإن قانون غوص وبالتالي قانون كولون غير صالحين.

لقد أجريت تجارب عديدة، ومنها أعمال كافنديش، فارادي وماكسويل Cavendish, Faraday & Maxwell لإظهار أن محصلة الشحنات على الناقل تنتقل إلى سطحه. وفي كل من الحالات المدروسة لم يتم التحقق من وجود حقل داخل الناقل المغلق. وقد أظهرت التجارب التي أجريت من قبل العلماء الثلاثة في العام 1971 أن أس r في قانون كولون هي $(2+\delta)$ حيث $\delta = (2.7 \mp 3.1)\times 10^{-16}$.

يمكن إجراء التجربة التالية للتحقق من أن الشحنة في الناقل تنتقل إلى السطح: لنأخذ كرة معدنية مشحونة بشحنة موجبة معلقة بطرف خيط من الحرير تترل إلى داخل ناقل مجوف غير مشحون معزول عن الأرض، وذلك من خلال فتحة صغيرة الشكل (3-20-a).



الشكل (3-20): تجربة تظهر أن الشحنة تنتقل إلى سطح الناقل في حالة التوازن الكهربائي. الناقل والكرة معزولان.

تحرض الكرة المعدنية المشحونة بشحنة موجبة شحنة سالبة على الجدار الداخلي للناقل المجوف، وشحنة موجبة على الجدار الخارجي للناقل المجوف الشكل (3-20-b).

يمكن الاستدلال على وجود الشحنة الموجبة على الجدار الخارجي للناقل المجوف بواسطة انحراف إبرة مقياس التكهرب (جهاز يستخدم لقياس الشحنة). يبقى انحراف إبرة مقياس التكهرب (Electrometer)[١] بدون تغيير عندما تلامس الكرة الوجه الداخلي للناقل المجوف الشكل (3-20-c)، وعند إخراج الكرة فإن قراءة مقياس التكهرب تبقى بدون تغيير ويمكن التحقق من أن الكرة تصبح غير مشحونة الشكل (3-20-d).

تظهر هذه التجربة أن الشحنة انتقلت من الكرة إلى الناقل المجوف. بالإضافة لذلك تنتقل شحنة الناقل المجوف إلى سطحه الخارجي. عند إنزال الكرة المعدنية الصغيرة المشحونة إلى مركز الناقل المجوف غير المشحون فإنه لا تُجذب ولا تُدفع من قبل الناقل المجوف، ويظهر هذا أن $\vec{E}=0$ داخل الناقل المجوف. عند وضع الكرة المعدنية الصغيرة المشحونة بجانب الناقل من الجهة الخارجية فإنها تُدفع من قبل الناقل ويدل هذا على أن $E \neq 0$ خارج الناقل.

٣-٦ - استخراج قانون غوص *Derivation of Gauss's law*:

لنتبع الطريقة التالية لاستخراج قانون غوص التي تستخدم مفهوم الزاوية المجسمة: نأخذ سطحاً كروياً نصف قطره r يتضمن سطح عنصري ΔA، الزاوية المجسمة $\Delta\Omega$ المقابلة لهذا السطح العنصري في مركز الكرة تعرف كما يلي:

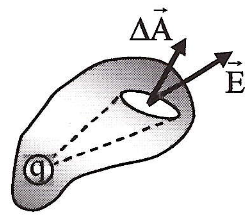
$$\Delta\Omega \equiv \frac{\Delta A}{r^2}$$

من هذه العلاقة نجد أنه ليس لـ $\Delta\Omega$ أبعاد (واحدات)، لأنه لكلي ΔA و r^2 بُعد مربع الطول L^2. وواحدة اللابُعد لهذه الزاوية تسمى ستيراديان (Steradian). بما أن مساحة السطح الكلي للكرة هي $4\pi r^2$ فإن الزاوية المجسمة المحددة بالكرة والتي رأسها في المركز هي:

١) الـ Electrometer هو جهاز يستخدم لقياس الشحنة.

$$\Omega = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi \quad \text{steradian}$$

نأخذ الآن شحنة نقطية محاطة بسطح مغلق ذو شكل عشوائي الشكل (3-21)، يمكن الحصول على التدفق الكلي من خلال هذا السطح بتعيين $\vec{E}.\Delta\vec{A}$ لكل عنصر سطح وجمعها على كامل السطح، يعطى التدفق من خلال عنصر السطح ΔA بالعلاقة التالية:



الشكل (3-21):
سطح مغلق كيفي محيط بشحنة نقطية والتدفق خلاله غير متعلق بشكله.

$$\Delta\Phi = \vec{E}.\Delta\vec{A} = E.\cos\theta \ \Delta A = k_e q \frac{\Delta A \cos\theta}{r^2}$$

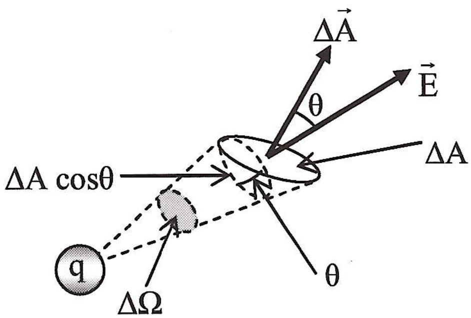
حيث بدلنا في العلاقة السابقة $E = k_e.\frac{Q}{r^2}$ من أجل شحنة نقطية لكن المقدار $\frac{\cos\theta}{r^2}\Delta A$ يساوي الزاوية المجسمة $\Delta\Omega$ التي تحدد السطح ΔA انطلاقا من الشحنة النقطية q.

من الشكل (3-22) نرى أن $\Delta\Omega$ مساوية للزاوية المجسمة المقطوعة (المحددة) بسطح عنصري من السطح الكروي الذي نصف قطره r. بما أن الزاوية المجسمة الكلية التي تحدد سطحاً مغلقاً في نقطة داخله هي 4π steradian، نجد أن التدفق الكلي خلال هذا السطح المغلق هو:

$$\Phi_c = k_e q \oint \frac{dA \ .\cos\theta}{r^2} = k_e q \oint d\Omega$$

$$\Rightarrow \quad \Phi_c = 4\pi k_e q = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad (3\text{-}6)$$

وعليه نكون قد اشتققنا قانون غوص كما هو موضح في العلاقة (6-3). لاحظ أن هذه النتيجة مستقلة عن شكل السطح المغلق، وغير متعلقة بموضع الشحنة داخل هذا السطح المغلق.



الشكل (3-22): السطح العنصري ΔA يتحدد بالزاوية المجسمة $\Delta\Omega$ عندما يرى من موقع الشحنة.

أسئلة ومسائل غير محلولة

الأسئلة:

١. إذا كان الحقل الكهربائي في منطقة ما في الفضاء مساوياً للصفر فهل يــدل ذلك على أنه لا توجد شحنات كهربائية في هذه المنطقة؟ علل إجابتك.

٢. إذا كانت هناك حقول كهربائية تخرج من سطح غوص أكثر من تلك الــتي تدخله ماذا يمكنك أن تستنتج حول محصلة الشحنة التي يحيط بها هذا السطح؟

٣. يوجد حقل كهربائي منتظم في منطقة في الفضاء، لا يوجد فيها أية شحنات كهربائية، ماذا يمكنك أن تستنتج عن التدفق الكهربائي خلال سطح غوص الموضوع في هذه المنطقة من الفضاء؟

٤. إذا كانت الشحنة الكلية داخل سطح مغلق معروفة لكن غير محددة التوزع، فهل يمكنك استخدام قانون غوص لإيجاد الحقل الكهربائي؟ أوضح ذلك.

٥. علل لماذا لا يتعلق التدفق الكهربائي خلال سطح مغلق لشحنة معطاة ضمن هذا السطح بحجم أو شكل هذا السطح؟

٦. نأخذ الحقل الكهربائي الناتج في جوار مستوٍ لانهائي غير ناقــل ومشــحون بشحنة منتظمة الكثافة. علل لماذا لا يتعلق هذا الحقل الكهربائي بالبعــد عــن هــذا المستوي باستخدام مفهوم المسافات بين خطوط الحقل؟

٧. استخدم قانون غوص لتعليل لماذا خطوط الحقل الكهربائي يجب أن تبدأ مــن شحنات كهربائية وتنتهي في شحنات أخرى.

(مساعدة: قم بتغيير أبعاد سطح غوص).

٨. شحنة نقطية موضوعة في مركز قشرة كروية معدنية غير مشحونة ومعزولــة عن الأرض، عندما نحرك الشحنة بإبعادها عن المركز. المطلوب:

a. صف ماذا يحصل للشحنة الكلية المحرضة على القشرة.

b. صف توزع الشحنة على السطح الداخلي والسطح الخارجي للكرة.

٩. علل لماذا تكمن الشحنة الزائدة في الناقل المعزول على سطحه؟ وذلك باستخدام الطبيعة التدافعية للقوة الكهربائية بين الشحنات المتماثلة والحركة الحرة للشحنات داخل الناقل.

١٠. وُضع شخص داخل كرة معدنية ضخمة مجوفة ومعزولة عن الأرض، فهل سيتأذى هذا الشخص إذا لمس السطح الداخلي للكرة عندما تشحن هذه الكرة بشحنة كبيرة؟ اشرح ماذا سيحصل إذا كان لدى هذا الشخص شحنة ابتدائية إشارتها معاكسة لإشارة شحنة الكرة؟

١١. كرتان مصمتتان نصف قطر كل منها R، وتحملان شحنتين كليتين متماثلتين قيمة كل منهما Q، إحدى هاتين الكرتين من ناقل جيد والأخرى مصنوعة من عازل، فإذا كانت الشحنة على الكرة العازلة موزعة بشكل متجانس على كامل حجمها، فكيف يكون الحقلان الكهربائيان خارج كل من هاتين الكرتين؟ قارن بينهما، هل الحقلان الكهربائيان متماثلان داخل الكرتين؟

المسائل:

مسألة (1):

قِشرة كروية موضوعة في حقل كهربائي منتظم، المطلوب: عين التدفق الكلي خلال هذه القشرة.

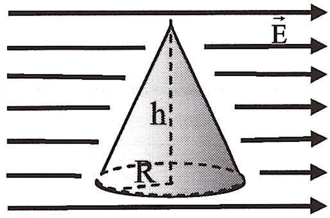
مسألة (2):

يعطى حقل كهربائي منتظم بالمعادلة الشعاعية $\vec{E}=a\,\vec{i}+b\,\vec{j}$، يقطع سطحاً مساحته A، المطلوب: ما هو التدفق خلال هذا السطح من أجل الحالات التالية:

يقع هذا السطح في المستويات: .a-yoz, b- xoz, c- xoy

مسألة (3):

مخروط نصف قطر قاعدته R، وارتفاعه h، موضوع على طاولة أفقية، يخترق هذا المخروط حقل كهربائي أفقي منتظم كما الشكل (3-23). المطلوب: عين التدفق الذي يخترق هذا المخروط.



الشكل (3-23): مخروط موضوع في حقل كهربائي منتظم.

مسألة (4):

هرم بقاعدة مربعة طول ضلعها 6m، ارتفاع هذا الهرم 4m، موضوع في حقل كهربائي شاقولي شدته 52N/C، المطلوب: احسب التدفق الكهربائي الكلي من خلال الوجوه الأربعة المائلة لهذا الهرم.

مسألة (5):

a. شحنة نقطية q موضوعة على بعد d من مستوٍ لانهائي، عين التدفق الكهربائي الناتج عن هذه الشحنة النقطية خلال هذه المستوي.

b. تتوضع شحنة نقطية على مسافة صغيرة جداً من مركز مربع كبير جداً، وهذه الشحنة هي نقطة واقعة على المحور المقام من مركز هذا المربع، عين التدفق الكهربائي التقريبي الناتج عن هذه الشحنة خلال هذا المربع.

c. علل لماذا تتطابق الإجابتان في الطلبين a, b؟

مسألة (6):

شحنة نقطية Q موضوعة في مركز قشرة كروية نصف قطرها R، المطلوب: عين التدفق الكلي من خلال: a. سطح هذه القشرة الكروية. b. أي سطح نصف كروي لهذه القشرة. c. هل تتعلق النتائج بنصف القطر، فسر ذلك؟

تطبيق: احسب التدفق من أجل: $Q=12\mu C, R=22cm$.

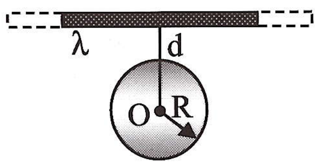
مسألة (7):

تتوضع الشحنات $-84\mu c, 27\mu c, -9\mu c, 5\mu c$ داخل غواصة، المطلوب:

a. احسب محصلة التدفق الكهربائي خلال الغواصة. b. قارن عدد خطوط الحقل التي تغادر سطح الغواصة مع عدد خطوط الحقل التي تدخله

مسألة (8):

شحنة خطية طولها لا نهائي، منتظمة التوزع في واحدة الطول، كثافتها الطولية الثابتة هي λ، تتوضع هذه الشحنة الخطية على بعد d من شحنة نقطية O، كما في الشكل (3-24)، المطلوب: عين التدفق الكهربائي الكلي خلال سطح كرة نصف قطرها R، ومركزها O. (مساعدة: خذ الحالتين R<d , R>d).



الشكل (3-24): شحنة خطية لا نهائية بالقرب من شحنة نقطية.

مسألة (9):

شحنة مقدارها 10μc، متوضعة في مركز جملة إحداثية كارتيزية، وهذه الشحنة محاطة بكرة مفرغة وغير ناقلة نصف قطرها 10cm، يوضع مثقب بحيث تكون ريشته محاذية للمحور oz، يستخدم هذا المثقب في ثقب الكرة المفرغة، المطلوب: احسب التدفق الكهربائي من خلال هذا الثقب.

مسألة (10):

تبلغ قيمة التدفق الكهربائي من خلال سطح مغلق على شكل أسطوانة $8.6\times10^4 Nm^2/C$، المطلوب: a. ما هي محصلة الشحنة داخل هذه الأسطوانة؟ b. بالاستناد إلى المعلومات المعطاة، ماذا يمكنك القول عن الشحنة الموجودة داخل الأسطوانة؟ c. أعد الطلبين السابقين عندما تبلغ قيمة التدفق $-8.6\times10^4 Nm^2/C$.

مسألة (11):

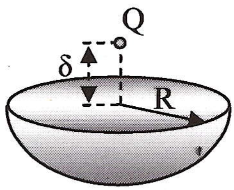
شحنة موجبة موزعة بانتظام على خيط رفيع مستقيم طوله 7m، قيمتها 2μc، يحيط بالخيط أسطوانة كرتونية طولها 2cm، ونصف قطرها 10cm، بحيث ينطبق الخيط على محورها، المطلوب: أوجد باستخدام تقريبات منطقية الحقل الكهربائي على سطح هذه الأسطوانة، ثم أوجد التدفق الكهربائي الكلي خلال هذه الأسطوانة.

مسألة (12):

شحنة نقطية Q متوضعة مباشرة في مركز الوجه المسطح لنصف كرة نصف قطرها R، كما في الشكل (3-24)، المطلوب:

a. عين التدفق الكهربائي خلال السطح المنحني لنصف الكرة.

b. عين التدفق الكهربائي من خلال الوجه المسطح لنصف الكرة.



الشكل (3-24): شحنة نقطية بالقرب من السطح المستوي لنصف كرة.

مسألة (13):

تحمل قشرة كروية رقيقة نصف قطرها 14cm، شحنة 32μc، موزعة بانتظام على سطحها. أوجد الحقل على بعد 10cm، ثم على بعد 20cm من مركزها.

مسألة (14):

كرة مصمتة نصف قطرها 40cm، تملك شحنة موجبة قيمتها الكلية 26μc، موزعة بانتظام على كامل حجمها، المطلوب: احسب قيمة الحقل الكهربائي عند الأبعاد التالية عن مركز هذه الكرة: 60cm , 40cm , 10cm , 0cm.

مسألة (15):

شحنة كروية موزعة بانتظام كثافة حجمية توزعها $\rho = \frac{a}{v}$، حيث a ثابت، المطلوب: أوجد الحقل الكهربائي بتابعية r، انظر الملاحظة في المسألة 26.

مسألة (16):

صفيحة ناقلة (معدنية) رقيقة طول ضلعها 50cm، موجودة في المستوي xoy، إذا كانت الشحنة الكلية لهذه الصفيحة هي $4\times10^{-8}C$، المطلوب: a. أوجد كثافة الشحنة على الصفيحة. b. أوجد الحقل الكهربائي فوق الصفيحة مباشرة. c. أوجد الحقل الكهربائي تحت الصفيحة مباشرة.

مسألة (17):

شحنة أسطوانية طويلة نصف قطرها R، موزعة بانتظام بكثافة حجمية ρ، المطلوب: أوجد الحقل الكهربائي على بعد r من محور هذه الشحنة حيث $r < R$.

مسألة (18):

شحنة علي شكل صفيحة رقيقة مستوية كثافتها $9\mu c/m^2$، المطلوب: أوجد الحقل الكهربائي في الجوار المباشر للصفيحة مقاساً من نقطة الوسط.

مسألة (19):

قضيب معدني منتظم طولاني، نصف قطره 5cm، مشحون وكثافة التوزع الطولي لشحنته هي 30 mC/m، أوجد الحقل الكهربائي عند الأبعاد التالية من مركز هذا القضيب: 3cm , 10cm , 100cm. ملاحظة: تقاس المسافات عمودياً على هذا القضيب.

مسألة (20):

كرة معزولة قطرها 8cm، وتحمل شحنة مقدارها $5.7\mu c$، موزعة بانتظام على حجمها، المطلوب: احسب الشحنة التي تتضمنها كل من الكرتين اللتين نصفا قطريهما 2cm , 6cm، واللتين تتمركزان مع الكرة الأساسية.

مسألة (21) :

قشرة كروية ناقلة قطرها الداخلي 4cm، ونصف قطرها الخارجي 5cm، تحمل شحنة $10\mu c$، إذا وضعت شحنة نقطية مقدارها $2\mu c$ في مركز هذه القشرة. أوجد الكثافة السطحية على السطح الداخلي، ثم على السطح الخارجي لهذه القشرة الكروية.

مسألة (22):

كرة ناقلة مصمتة نصف قطرها 2cm، تملك شحنة مقدارها $8\mu c$، ويوجد قشرة كروية ناقلة نصف قطرها الداخلي 4cm، والخارجي 5cm، متمركز مع الكرة السابقة، وتحمل شحنة مقدارها $-4\mu c$، المطلوب: أوجد الحقل الكهربائي على الأبعاد التالية من المركز المشترك a) $r = 1cm$, b) $r = 3cm$, c) $r = 4.5cm$, d) $r = 7cm$.

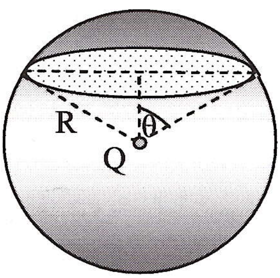
مسألة (23):

سلك مستقيم طويل محاط بأسطوانة معدنية مجوفة، ينطبق محورها على هذا السلك. يوجد على السلك شحنة تتوزع عليه بكثافة مقدارها λ في واحدة الطول. ويوجد على الأسطوانة شحنة تتوزع عليها بكثافة مقدارها 2λ في واحدة الطول، المطلوب من هذه المعطيات وباستخدام قانون غوص، أوجد كلاً مما يلي:

a. مقدار الشحنة في واحدة الطول على كل من السطحين الداخلي والخارجي لهذه الأسطوانة. b. الحقل الكهربائي خارج الأسطوانة على بعد r من المحور المشترك.

مسألة (24):

تحيط كرة نصف قطرها R بشحنة نقطية مقدارها Q، متوضعة في مركزها. المطلوب: a. أظهر أن التدفق الكهربائي خلال قبة دائرية تقابل نصف زاوية مقدارها θ، كما في الشكل جانباً، يعطى بالعلاقة $\Phi=\frac{Q}{2\varepsilon_0}(1-\cos\theta)$. b. ما هو التدفق في كل من الحالتين $\theta = 90^\circ$, $\theta = 180^\circ$؟



الشكل (3-25):
التدفق من خلال قبة كروية الناتج عن شحنة موضوعة في مركز الكرة المقتطعة منها هذه القبة.

مسألة (25):

كرة مصمتة معزولة نصف قطرها b، تحمل شحنة تتوزع عليها بكثافة حجمية غير منتظمة، تعطى هذه الكثافة بالعلاقة $\rho = c\,r$، حيث $0<r\leq b$، c ثابت، المطلوب:

أوجد قيمة الشحنة الموجودة ضمن نصف القطر في الحالتين: a- $R<b$, b- $R>b$.

(لاحظ: أن عنصر الحجم dV لقشرة كروية نصف قطرها r وسماكتها dr يساوي $4\pi r^2 dr$).