كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : هندسة تفاضلية

المحاضرة : الاولى/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

مقررات المنحنيات:

1- نظرية المنحنيات
2- نظرية السطوح
3- التحليل التنسوري
4- المنطويات التفاضلية

نظرية المنحنيات:

* تعريف الفضاء الأفيني: لتكن A مجموعة غير خالية من النقاط نرمزها $M, N, \dots$ ، وليكن V^n فضاء متجهياً.

- الفضاء المتجهي: يشكل أي زوج من نقاط الفضاء الثلاثي متجهاً في هذا الفضاء وتشكل هذه المتجهات مجموعة غير خالية نسميها الفضاء المتجهي لأنها مجموعة غير خالية معرف عليها عملية جمع متجهات وضرب متجه بعدد $(V^n, +, \cdot)$

نقول عن A إنه فضاء تآلفي (أفيني) إذا تحقق ما يلي:

① يقابل كل زوج من النقط M, N يوجد متجه $\vec{r}$ من V^n بحيث يكون $\vec{r} = \overrightarrow{MN}$

② من أجل أي نقطة M من A وشعاع $\vec{r}$ من V^n فإنه توجد نقطة وحيدة N من A بحيث يكون $\vec{r} = \overrightarrow{MN}$

③ مهما تكن النقاط P, Q, R فإنه:

$$\vec{PQ} + \vec{QR} + \vec{RP} = 0$$
$$\vec{PQ} + \vec{QR} = \vec{PR}$$

تحقق فيها علاقة شال.

مفهوم المنحني:

* المنحني: هو المحل الهندسي لمسار نقطة متحركة في المستوي أو في الفراغ «المستوي حالة خاصة من الفراغ»

- المنحني الأولي: نسمي مجموعة النقاط P منحنياً أولياً إذا كانت هذه المجموعة صورة لمجال مفتوح وفق تطبيق تبولوجي من هذا المجال إلى الفضاء $]\alpha,\beta[$

- التطبيق التبولوجي: هو التطبيق المستمر الذي يصور شكلها F إلى شكل F' وبالعكس «والعكسي مستمر من F' إلى F»

- المنحني البسيط: نسمي مجموعة النقاط P منحنياً بسيطاً إذا كان عند كل نقطة من نقاطه يوجد جوار بحيث أن ~~كل جزء~~ هذا الجزء من المجموعة P يشكل منحنياً أولياً.

- التمثيل الوسيطي للمنحني:

ذكرنا أن المنحني هو صورة لمجال مفتوح $]\alpha,\beta[$ وفق تطبيق تبولوجي (مستمر هو ومعكوسه). ليكن R هو التطبيق التبولوجي

$$R:]\alpha,\beta[\to R^3$$
$$t \to R(t) = (R_1(t), R_2(t), R_3(t))$$

$$\begin{cases} x = R_1(t) \\ y = R_2(t) \quad ; t \in]\alpha,\beta[\subset IR \\ z = R_3(t) \end{cases}$$

نسمي جملة المعادلات السابقة بالتمثيل الوسيطي للمنحني المعين بالوسيط t ويكون معادلة المنحني في الحالة الديكارتية (تحليلياً)

$$R(t) = R_1(t)\vec{i} + R_2(t)\vec{j} + R_3(t)\vec{K}$$

حيث $\vec{i}, \vec{j}, \vec{K}$ متجهات الوحدة المحمولة على المحاور الإحداثية لذلك عند كل قيمة للوسيط t من المجال $]\alpha, \beta[$ تعطي نقطة M في الفراغ ومجموعة النقاط M هي المنحني ℓ في الفضاء.

ملاحظة:

ليس بالضرورة أن يكون مجال تغير الوسيط مجالاً مفتوحاً من الممكن أن يكون مغلق أو نصف مغلق.

مثال: المستقيم في الفراغ موجهة $\vec{v}(a,b,c)$ ويمر ب $R_0(x_0, y_0, z_0)$

$$R(t) = R_0 + \vec{v}\,t$$

ولكل قيمة للوسيط t نحصل على نقطة من المستقيم

$t \in \mathbb{R} \rightarrow$ مستقيم

$t \in [0,1] \rightarrow$ قطعة مستقيمة

$t \in]0, \infty[\rightarrow$ نصف مستقيم

- المنحني المستوي: هو حالة خاصة من المنحني في الفراغ عندما يكون $Z(t) = 0$

- المعادلات الوسيطية للمنحني المستوي:

$$x = x(t)$$
$$y = y(t) \quad ; \quad t \in \mathbb{R}$$

ويمكن أن يكون لمنحني ما أكثر من تمثيل وسيطي.

مثال: (منحني الاستروفويد)

$$x = \alpha \frac{t^2-1}{t^2+1}$$

$$y = \alpha t \frac{t^2-1}{t^2+1}$$

منحني مستوي فيه $Z(t)=0$ ولكنه ليس بسيطاً.

نحصل على نقطة من المبدأ:

$y(t)=0$ $\qquad$ $x(t)=0$

$\alpha t(t^2-1)=0$ $\qquad$ $\alpha(t^2-1)=0$

$t=0,\ t=\mp 1$ $\qquad$ $t=\mp 1$

يوجد قيمتين للوسيط t ليمر بالمبدأ.

- المنحني المغلق: هو اجتماع لمنحنيين بسيطين بسيطين بحيث أن كل طرف من أحد المنحنيين من كل منهما ينطبق مع طرف المنحني الآخر

مثال: منحني الدائرة:

$$x = 2\cos t$$
$$y = 2\sin t \qquad ; 0 \le t \le 2\pi$$

يمكن تجزئة هذا المنحني إلى منحنيين بسيطين بحيث يكون:

$$\ell_1 : t \in]0, \pi[$$

$$\ell_2 : t \in]\pi, 2\pi[$$

- المنحني المعرف بتقاطع سطحين: ليكن:

$$\begin{cases} F_1(x,y,Z)=0 \\ F_2(x,y,Z)=0 \end{cases}$$

تسمى هذه الجملة بمعادلة منحني في الفراغ عندئذٍ يمكن الانتقال للتمثيل الوسيطي إذا كان:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix} \neq 0$$

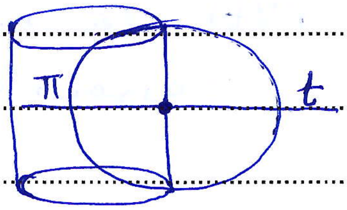
عندئذٍ: نفرض $x = t$ ومنه نجد $y = y(t)$

$z = z(t)$

التمثيل الوسيطي للمنحني:

$$\begin{cases} x = t \\ y = y(t) \quad ; \ t \in \mathbb{R} \\ z = z(t) \end{cases}$$

مثال: منحني فيفيان الناتج عن تقاطع الأسطوانة (نصف قطرها $\frac{R}{2}$) والكرة (نصف قطرها R)



منحني فيفيان $\begin{cases} F_1 = x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ F_2 = x^2 + y^2 - Rx = 0 \end{cases}$

للانتقال للتمثيل الوسيطي:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 2y & 0 \end{vmatrix} = -4yz \neq 0$$

نعوض
$$x = t$$
نجد
$$y = \mp\sqrt{Rt - t^2}$$
$$z = \mp\sqrt{R^2 - Rt}$$
المعادلات الوسيطية للمنحني المعرف بتقاطع الاسطوانة والكرة.

النقطة العادية و النقطة الشاذة:

ليكن $L = \vec{r}(t)$ منحنياً معطى بالتمثيل الوسيطي

نسمي $\vec{r}(t)$ الدالة المتجهية

نقول إنّ M الموافقة للوسيط t_0 هي نقطة عادية إذا كان $r'(t_0) \neq 0$

وعندما $r'(t_0) \neq 0$ مهما يكن t عندئذٍ نسمي $\vec{r}(t)$ منحني نظامي

متجه المماس:

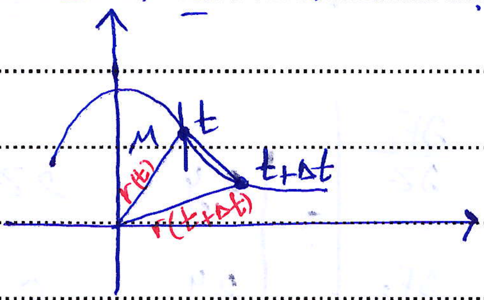
ليكن $\ell = \vec{r}(t)$ حيث $t \in]\alpha, \beta[$ نقول إنَّ الدالة المتجهية $\vec{r}(t)$ تملك مشتقاً $\vec{r'}(t)$ على المجال $t \in]\alpha, \beta[$ إذا كانت النهاية الآتية موجودة:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t+\Delta t) - r(t)}{\Delta t}$$

موجودة و محدودة.

عندئذٍ نرمز لهذه النهاية بالرمز $r'(t)$ ويكون هذا المتجه هو متجه المماس في النقطة الموافقة للوسيط t

$M = r(t)$



لدينا: $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

$r'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$

وتكون:

$$\left.\begin{matrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{matrix}\right\}$$ مركبات متجه المماس للمنحني

نسميها:

طويلة متجه المماس $|r'(t)| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$

أما المتجه: $\dfrac{r'(t)}{|r'(t)|}$ هو متجه وحدة المماس ونرمز له T

$$\Rightarrow \vec{T} = \frac{r'(t)}{|r'(t)|}$$

المستقيم المماس للمنحني:

$r'(t)$: متجه توجيه للمستقيم المماس

$\vec{T}$: متجه توجيه للمستقيم المماس.

المستقيم المماس للمنحني في نقطة ما $t_0 \in]\alpha, \beta[$ هو: المستقيم المار بتلك النقطة ويقبل T توجيهاً له.

$r(t) = r(t_0) + \lambda \vec{T}(t + t_0)$

$r(t) = r(t_0) + \lambda r'(t_0)$

المستقيم المماس للمنحني
$$\begin{cases} x = x(t_0) + \lambda x'(t_0) \\ y = y(t_0) + \lambda y'(t_0) \\ z = z_0(t_0) + \lambda z'(t_0) \end{cases}$$

المعادلات الديكارتية:

$$\frac{x-x_0}{x_0'} = \frac{y-y_0}{y_0'} = \frac{z-z_0}{z_0'}$$

مثال: أوجد متجه وحدة المماس للمنحني المعرف بالعلاقة:

$$\begin{cases} x = a\,ch t \cos t \\ y = a\,ch t \sin t \\ z = a t \end{cases} \quad ; \; a>0$$

في النقطة الموافقة لـ $t=0$

* $r'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$

$x'(t) = a\,sh t \cos t - a\,ch t \sin t$

$y'(t) = a\,sh t \sin t + a\,ch t \cos t$

$z'(t) = a$

* $|r'(t)| = (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}}$

$x'^2(t) = a^2(sh^2 t \cos^2 t + a\,sh^2 t \sin^2 t - 2\,sh t \cos t\, ch t \sin t)$

$y'^2(t) = a^2(sh^2 t \sin^2 t + ch^2 t \cos^2 t + 2\,sh t\, ch t \cos t \sin t)$

$z'^2 = a^2$

* $x'^2 + y'^2 + z'^2 = a^2(1 + sh^2 t + ch^2 t)$

$\Rightarrow |r'(t)| = \sqrt{a^2(ch^2 t + sh^2 t + 1)}$

$= \sqrt{a^2(ch^2 t + ch^2 t)}$

$= \sqrt{2\,ch^2 t\, a^2} = \sqrt{2}\, a\, ch t$

$\Rightarrow \vec{T} = \frac{r'(t)}{|r'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{2}\,a\,ch t}(x', y', z')$

مثال: أثبت أن المنحني ليس نظامياً في النقطة $(0,1,0)$

$$\vec{R}(t) = (t^3, \cos t, 0)$$

ـ النقطة الموافقة للوسيط $t = t_0$

$$t^3 = 0$$
$$\cos t = 1$$
$$0 = 0$$

ومنه لنجد $r'(0)$:

$$R'(t) = (3t^2, -\sin t, 0)$$

$$R'(0) = (0,0,0) = \vec{0} \Rightarrow$$ ليس نظامياً

طول قوس منحني بين نقطتين فيه:

$$\ell = \vec{r}(t) = (x(t)\,\vec{i}, y(t)\,\vec{j}, z(t)\,\vec{k})$$

منحنياً معرفاً على المجال $t \in \,]\alpha, \beta[$

إنَّ طول قوس منحني ℓ الواقع بين النقطتين M, N الموافقتين للوسيط $t = \alpha$, $t = \beta$ على الترتيب هو:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} |r'(t)|\, dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt$$

مثال: احسب طول قوس اللولب الدائري الواقع بين النقطتين:

$$t = 2\pi$$
$$t = 0$$

الحل:

$$r(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$$

$$r'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$$

$$|r'(t)| = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2+b^2}\,dt = \left[\sqrt{a^2+b^2}\,t\right]_0^{2\pi} = 2\pi\sqrt{a^2+b^2}$$

طول قوس منحني ((الوسيط الطبيعي)):

ليكن l منحنياً معرفاً بدلالة الوسيط t وفق الدالة المتجهية

$r(t)\ ;\ t\in\,]\alpha,\beta[$

لتكن M_0 نقطة مثبتة من المنحني

وليكن M نقطة من المنحني

عندئذٍ نسمي طول القوس من المنحني بين النقطتين M, M_0

$$S = \int_{t_0}^{t} |r'(t)|\,dt$$

$$S = \int_0^{t} |r'(t)|\,dt$$

نسمي S الوسيط الطبيعي للمنحني حيث:

$S' = |r'(t)|$

مثال: $r(t) = (a\cos t\,,\ a\sin t\,,\ a)\ ;\ a>0$

$r'(t) = (-a\sin t\,,\ a\cos t\,,\ 0)$

$|r'(t)| = a$

$$S = \int_0^t a\,dt = [at]_0^t = at \Rightarrow S = at \Rightarrow \boxed{t = \frac{S}{a}}$$

$$r(S) = \left(a\cos\frac{S}{a}\,,\ a\sin\frac{S}{a}\,,\ a\right) \Rightarrow \boxed{|r'(S)| = 1}$$

ملاحظة: (.) مشتق بالنسبة لـ S

(′) مشتق بالنسبة لـ t

انتهت المحاضرة