كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : إحصاء رياضي

المحاضرة : الاولى/عملي/

ملاحظة:

المتغيرات العشوائية

مستمرة ← → منفصلة

$-\infty < X < \infty$ $X = 0, 1, 2, \dots$

دالة الكثافة الاحتمالية   دالة التوزيع الاحتمالي

① $f(x) \geq 0$ ① $0 \leq p(x) \leq 1$

② $\int f(x)\,dx = 1$ ② $\sum p(x) = 1$

السؤال الأول: هل الدالة الحقيقية تشكل توزيعاً احتمالياً؟

$$p(x) = \frac{x}{3} \; ; \; x = 0, 1, 2$$

الحل: نتحقق من الشرطين:

① $p(0) = 0$

$p(1) = \frac{1}{3}$

$p(2) = \frac{2}{3}$

الشرط الأول محقق

② $\sum p(x) = 0 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1$

الشرط الثاني محقق

$\Leftarrow$ $p(x)$ دالة توزيع احتمالي

السؤال الثاني:

لتكن الدالة $f(x)=e^{-x}$ حيث $0<x<\infty$

هل $f(x)$ دالة ~~توزيع~~ كثافة احتمالية؟

الحل: نتحقق من الشرطين:

① $f(x)=e^{-x}\geq 0$ محقق.

② $\int f(x)\,dx=\int_0^\infty e^{-x}\,dx=-[e^{-x}]_0^\infty=1$

$\Leftarrow$ $f(x)$ دالة كثافة احتمالية

السؤال الثالث:

إذا كان جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X يعطى بالشكل:

x	-1	0	1	2	3
$p(x)$	0.1	0.3	a	0.2	0.3

① أوجد a

② أوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري

الحل:

$\Sigma p(x)=1$

$p(-1)+p(0)+p(1)+p(2)+p(3)=1$

$0.1+0.3+a+0.2+0.3=1$

$\Rightarrow a+0.9=1$

$\Rightarrow a=1-0.9$

$\Rightarrow \boxed{\cancel{a=1}}\ \boxed{a=0.1}$

② التوقع: $E(x) = \sum x P(x)$

$= -1(0.1) + 0(0.3) + 1(0.1) + 2(0.2) + 3(0.3)$

$= -0.1 + 0 + 0.1 + 0.4 + 0.9$

$= 1.3$

التباين: $\sigma^2(x) = E(x^2) - (E(x))^2$

$E(x^2) = \sum x^2 P(x)$

$= 1(0.1) + 0 + 1(0.1) + 4(0.2) + 9(0.3)$

$= 3.7$

$\Rightarrow \sigma^2(x) = 3.7 - (1.3)^2$

$= 3.7 - 1.69 = 2.01$

الانحراف: $\sigma(x) = \sqrt{2.01} = 1.41$

السؤال الرابع

إذا كان X متغير عشوائي بدالة كثافة احتمالية $f(x) = ae^{-3x}$, $x > 0$
أوجد قيمة الثابت a ثم أوجد $P(1 \leq x \leq 2)$

الحل:

$\int_0^\infty f(x)\,dx = 1$

$\int_0^\infty a e^{-3x}\,dx = 1$

$a\left(\frac{-1}{3}\right)\left[e^{-3x}\right]_0^\infty = 1$

$\frac{-1}{3} a \left[e^{-\infty} - e^{0}\right] = 1 \Rightarrow \frac{-1}{3} a [0 - 1] = 1$

$\frac{1}{3}a = 1 \Rightarrow \boxed{a=3}$

$$P(1 \le x \le 2) = \int_1^2 3e^{-3x}\,dx = 3 \cdot \frac{-1}{3}\left[e^{-3x}\right]_1^2$$
$$= -\left[e^{-6} - e^{-3}\right]$$
$$= e^{-3} - e^{-6}$$

السؤال الخامس:

ليكن تابع الكثافة $f(x) = 3x^2 ;\ 0 < x < 1$

أوجد التوقع والتباين.

الحل: التوقع:

$$E(x) = \int_0^1 x\, f(x)\,dx$$
$$= \int_0^1 x(3x^2)\,dx = \left[\frac{3}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{3}{4} - 0 = \frac{3}{4}$$

التباين:

$$V(x) = E(x^2) - (E(x))^2$$
$$E(x^2) = \int_0^1 x^2 \cdot f(x) = \int_0^1 x^2 \cdot 3x^2\,dx$$
$$= \int_0^1 3x^4\,dx = \left[\frac{3}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{3}{5} - 0 = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow V(x) = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{3}{80}$$

انتهت المحاضرة