كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : نظرية القياس

المحاضرة : الثانية/نظري/

مثال: إذا كانت $\Omega = \{a, b, d\}$

م- أوجد مجموعة أجزاء المجموعة Ω أي $p(\Omega)$ وما هو عدد عناصرها.

ب- اعط مجموعة جزئية من $p(\Omega)$

ج- اعط مثال عن أجزاء Ω (مجموعات جزئية من $p(\Omega)$).

الحل:

م- إذا كانت $|\Omega| = 3$ فإن $|p(\Omega)| = 2^3 = 8$

$$p(\Omega) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,d\}, \{b,d\}, \{a,b,d\}\}$$

ملاحظة: المجموعة الخالية ϕ هي دوماً مجموعة جزئية من أي مجموعة أخرى ولتكن Ω أي، Ω مجموعة ما $\phi \subseteq \Omega$

ب-

$$A_1 = \{\{a\}, \{b\}, \{a,b\}\} \subseteq p(\Omega)$$

مجموعة جزئية من $p(\Omega)$

ويكل عنصر: $\{a\} \in A_1$

$\{b\} \in A_1$

$\{a,d\} \in A_1$

هي عناصر من A_1 لذلك هي عناصر من $p(\Omega)$ وكل منها أي $\{a\}$، $\{b\}$، $\{a,b\}$ جزء من Ω أي مجموعة جزئية من Ω، أي:

$$\left.\begin{array}{l}\{a\} \subseteq \Omega \Leftrightarrow \{a\} \in A_1 \subseteq p(\Omega) \\ \{b\} \subseteq \Omega \Leftrightarrow \{b\} \in A_1 \subseteq p(\Omega)\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\{a,b\} \subseteq \Omega \Leftrightarrow \{a,b\} \in A_1 \subseteq p(\Omega)$$

و A_1 هي مرتبة أو مجموعة أجزاء أو أسرة أو عائلة من المجموعة Ω

ملاحظة: دوماً لدينا:

① $\phi \subseteq \Omega \Leftrightarrow \phi \in p(\Omega)$

② $A \subseteq \Omega \Leftrightarrow A \in p(\Omega)$

(A) بعض المجموعات من أجزاء Ω:

$$A_2 = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$$
$$= \{\{a,b\}, \{b,d\}, \phi, \{a,b,d\}\} \subseteq p(\Omega)$$

$$A_3 = \{A_1, A_2\} = \{\phi, \{a,b,d\}\} \subseteq p(\Omega)$$

$$A_4 = \{A_1\} = \{\phi\} \subseteq p(\Omega)$$

$$A_5 = p(\Omega) \subseteq p(\Omega)$$

$$A_6 = \{\{a\}, \{b\}, \{d\}\} \subseteq p(\Omega)$$

$$A_7 = \{\phi, \{a\}, \{d\}, \{a,d\}, \{b,d\}\} \subseteq p(\Omega)$$

$A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$: جميعها مجموعات جزئية من $p(\Omega)$

(وكل عنصر من عناصرها هو جزء من Ω المجموعة جزئية)

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$ أي نسمي للآن منها
صف أو عائلة أو أسرة من أجزاء المجموعة X.

الفصل الأول: الحلقات - الجبور - الجبور التامة:

* تعريف الحلقة: لتكن X مجموعة ما غير خالية، ندعو الصف غير الخالي D من أجزاء X حلقة في X، إذا كان D مغلق بالنسبة لعملية الاجتماع المنتهي والفرق أي:

① $\forall A, B \in D \Rightarrow A \cup B \in D$

② $\forall A, B \in D \Rightarrow A - B \in D$

نتيجة: من التعريف السابق ينتج أنه إذا كان D حلقة في X
و $X \neq \phi$ فإن D مغلقة بالنسبة:

أولاً: للفرق التناظري أي:

$\forall A, B \in D \Rightarrow A \Delta B \in D$

لأنه:

لدينا $A \Delta B = \underbrace{(A - B)}_{\in D} \cup \underbrace{(B - A)}_{\in D} \in D$ (لأن D حلقة في X)

ثانياً: للتقاطع أي:

$\forall A, B \in D \Rightarrow A \cap B \in D$

لأنه:

$A \cap B = \underbrace{(A \cup B)}_{\in D} - \underbrace{(A \Delta B)}_{\in D} \in D$ (لأن D حلقة في X)
(لأن D حلقة في X)

كذلك فإن: $\phi \in D$ لأنه:

$\forall A \in D \Rightarrow A - A = \phi \in D$

ثالثاً: مغلق بالنسبة للاجتماعات و التقاطعات المنتهية:

أي: إذا كان $A_1, \ldots, A_n$ متتالية منتهية من عناصر الحلقة D عندئذٍ فإنَّ:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n \in D$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \in D$$

أمثلة:

$\boxed{1}$ الصفان $\{\phi\}$ ، $P(X)$ هما حلقتان في المثال X وهما وعلى الترتيب أصغر حلقة و أكبر حلقة في X بالنسبة للعلاقة الترتيب وهي علاقة الاحتواء ($\subseteq$) المعرفة على X.

$\boxed{2}$ ليكن X مجموعة ما غير خالية وليكن صف المجموعات المنتهية من أجزاء X، إذن D حلقة في X حيث:

$D = \{A ;$ A مجموعة جزئية من X $\wedge$ A مجموعة منتهية في $X\}$

أو بالشكل:

$D = \{A ;$ $A \subseteq X$ مجموعة منتهية في $X\}$

والمطلوب أثبت أن D حلقة في X.

$\forall A, B \in D \Rightarrow$ A و B مجموعتان جزئيتان من X وهما منتهيتان وبالتالي: $A \cup B$ مجموعة منتهية في X وهي جزئية منها أي $A \cup B \in D$

وكذلك فرق مجموعتين منتهيتين A و B في X هو مجموعة منتهية وجزئية من X أي:

$\forall A, B \in D \Rightarrow A - B \in D$

$\Leftarrow$ D حلقة في X.

ملاحظة (1):

البرهان السابق يصح من أجل أصف المجموعات المحدودة من مجموعة ما غير خالية X.

2- صف المجموعات المحدودة من مجموعة ما غير منتهية وغير خالية X.

ملاحظة (2):

المجموعة الخالية $\emptyset$ هي مجموعة منتهية لأن عدد عناصرها الصفر وهو منتهي.

$\boxed{3}$ صف المجالات من الشكل $[a,b[$ حيث:

$-\infty < a < b < +\infty$ في IR أي:

$D = \{[a,b[\;;\; -\infty < a < b < +\infty \;;\; [a,b[\subseteq IR\}$

مجال نصفي من IR لا يشكل حلقة في IR لأنه على سبيل

المثال إذا أخذنا: $A=[-3,1[$ ، $B=[5,20[$

فإنه:

$A \cup B = [-3,1[\cup [5,20[\notin D$

لأنه لا يشكل مجالاً من الشكل $[a,b[$ مع أنه:

$A=[-3,1[\,,\; B=[5,20[\;;\; A-B=[-3,1[\in D$

إذاً D بشكل عام لا يشكل حلقة في IR.

ملاحظة هامة:

إن أسرة المجالات من الأشكال التالية:

$D_1 = \{\,]a,b] \subseteq \mathbb{R} \;;\; -\infty < a < b < +\infty\}$

$D_2 = \{\,]a,b[\subseteq \mathbb{R} \;;\; -\infty < a < b < +\infty\}$

$D_3 = \{\,[a,b] \subseteq \mathbb{R} \;;\; -\infty < a < b < +\infty\}$

لا تشكل في الحالة العامة حلقة في $\mathbb{R}$.

سؤال:

إن الحلقة غير مغلقة بالنسبة لعملية التتميم (تتميم مجموعة) أو الإتمام بشكل عام، والسؤال الذي يطرح نفسه: متى تكون الحلقة D في مجموعة ما غير خالية X مغلقة بالنسبة لعملية التتميم؟ ونجاوب عن هذا السؤال المبرهنة التالية:

* الشرط الكافي حتى تكون حلقة D في مجموعة ما غير خالية X مغلقة بالنسبة لعملية التتميم هو أن يكون $X \in D$

البرهان:

لزوم الشرط: الفرض: D حلقة في X و D مغلقة بالنسبة لعملية التتميم

الطلب: $X \in D$

البرهان:

$$\forall A \in D \Rightarrow \bar{A} \in D \Rightarrow A \cup \bar{A} = X \in D$$

لأن D مغلقة بالنسبة لعملية التتميم — لأن D حلقة في X

كفاية الشرط: الفرض: D حلقة في X و $X \in D$

الطلب: D مغلقة بالنسبة لعملية التتميم

البرهان:

$$\forall A \in D \Rightarrow A, X \in D \Rightarrow X - A = \bar{A} \in D \Rightarrow \bar{A} \in D$$

لأن D حلقة في X

بالتالي D مغلقة بالنسبة لعملية التتميم

انتهت المحاضرة