كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : تحليل تابعي2

المحاضرة : الاولى /نظري/

فضاء الجداء الداخلي:

تعريف: الجداء الداخلي: ليكن X فضاء متجهي فوق الحقل k ، الجداء الداخلي على فضاء خطي X هو تطبيق لـ $X \times X$ في الحقل k لـ X ويرمز له بـ $<\cdot,\cdot>$ بحيث تتحقق الشروط التالية:

$$<\cdot,\cdot> : X \times X \to k$$

$$\forall x, y, z \in X \quad , \quad \alpha \in k$$

1. $<x+y, z> = <x, z> + <y, z>$
2. $<\alpha x, y> = \alpha <x, y>$
3. $<x, y> = \overline{<y, x>}$
4. $<x, x> \geq 0$
5. $<x, x> = 0 \iff x = 0$

ملاحظة: في حال كان $k = \mathbb{R}$ عندئذٍ

$$<x, y> = \overline{<y, x>} = <y, x>$$

فضاء الجداء الداخلي: هو فضاء خطي X مزوّد بجداء داخلي معرّف على X أي $(X, <\cdot,\cdot>)$.

مثال: $(\mathbb{R}^n, <\cdot,\cdot>)$ فضاء جداء داخلي بحيث

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad <x, y> = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

ملاحظة: يحدّد الجداء الداخلي على X نظيماً بالعلاقة:

$$\|x\| = \sqrt{<x, x>}$$

ملاحظة: فضاءات الجداء الداخلي هي فضاءات منظّمة

ملاحظة: نحدّد الجداء الداخلي متركاً على X بالمساواة:

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{<x-y\,,\,x-y>}$$

ملاحظة: كل فضاء جداء داخلي هو فضاء متري.

- **خواص أخرى لفضاء الجداء الداخلي:**

X فضاء متجهي فوق الحقل K ولدينا $(X, <\cdot,\cdot>)$ فضاء جداء داخلي عندئذٍ:

$\forall x, y, z \in X \quad , \alpha, \beta \in K$

1. $<\alpha x + \beta y\,,\, z> = \alpha <x, z> + \beta <y, z>$
2. $<x, \alpha y> = \bar{\alpha} <x, y>$
3. $<x, \alpha y + \beta z> = \bar{\alpha} <x, y> + \bar{\beta} <x, z>$
4. $<x, 0> = 0$
5. $<0, x> = 0$

الاثبات:

اثبات 1

$<\alpha x + \beta y, z> \overset{\text{حسب شرط ③}}{=} <\alpha x, z> + <\beta y, z>$

$= \alpha <x, z> + \beta <y, z>$

اثبات 2

$<x, \alpha y> = \overline{<\alpha y, x>} = \overline{\alpha <y, x>} = \bar{\alpha}\, \overline{<y, x>} =$

$\bar{\alpha} <x, y>$

اثبات 3

$<x, \alpha y + \beta z> = \overline{<\alpha y + \beta z, x>} = \overline{<\alpha y, x> + <\beta z, x>}$

$= \bar{\alpha}\overline{<y, x>} + \bar{\beta}\, \overline{<z, x>} =$

$\bar{\alpha} <x, y> + \bar{\beta} <x, z>$

اثبات 4

$<x, y + z> = <x, y> + <x, z>$

بأخذ $y = 0$ نجدأنّ

$<x,z> = <x,0> + <x,z> \implies <x,0> = 0$

إثبات $\boxed{5}$ $<x,0> = 0$ من الخاصة الرابعة لدينا:

$\implies \overline{<x,0>} = 0 \implies <0,x> = 0$

• التعامد في الجداء الداخلي:

تعريف: $(X, <.,.>)$ فضاء جداء داخلي وليكن $x, y \in X$

① يقال عن العنصرين x, y بأنهما متعامدان إذا كان $<x,y> = 0$ ونرمز لذلك بالرمز $x \perp y$.

② يقال عن العنصر $x \ni X$ أنه متعامد مع المجموعة A في X إذا كان $x \perp a$ أياً كان $a \in A$.

③ يقال عن المجموعة A أنها متعامدة مع المجموعة B في X اذا كان $a \perp b$ لكل $a \in A$ و $b \in B$.

• متراجحة شوارتز (شغارتز):

ليكن $(X, <.,.>)$ فضاء جداء داخلي عندئذٍ

$$|<x,y>| \leq \|x\| . \|y\|$$

الاثبات:

من أجل $y = 0$ المتراجحة محققة لذلك نفرض $y \neq 0$

ليكن $\alpha \in K$ عندئذٍ

$$0 \leq \|x - \alpha y\|^2 = <x - \alpha y, x - \alpha y> =$$

$$<x,x> - \bar{\alpha} <x,y> - \alpha <y,x> + \alpha \bar{\alpha} <y,y>$$

$$= \|x\|^2 - \bar{\alpha} <x,y> - \alpha <y,x> + \alpha \bar{\alpha} \|y\|^2$$

لنضع $\alpha = \frac{1}{\|y\|^2} . <x,y>$

$\implies$

$$0 \leq \|x\|^2 - \frac{<x,y><y,x>}{\|y\|^2} - \frac{<x,y><y,x>}{\|y\|^2} +$$

$$\frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2} \cdot \frac{\langle y,x\rangle}{\|y\|^2} \cdot \|y\|^2$$

$$\Rightarrow 0 \leq \|x\|^2 - \frac{1}{\|y\|^2} \cdot \langle x,y\rangle \cdot \overline{\langle x,y\rangle}$$

$$0 \leq \|x\|^2 - \frac{1}{\|y\|^2} \cdot |\langle x,y\rangle|^2$$

$$\Rightarrow 0 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 - |\langle x,y\rangle|^2$$

$$\Rightarrow |\langle x,y\rangle|^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$$

$$\Rightarrow \boxed{|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|^2}$$

تمرين: ليكن $X = \mathbb{R}_2[x]$ فضاء كثيرات الحدود من الدرجة الثانية على الأكثر المعرفة على حقل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ أي:

$$X = \{ f(x) = ax^2 + bx + c \quad ; a,b,c \in \mathbb{R} \}$$

① أثبت أن التطبيق $\langle \cdot,\cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$

$$\forall f,g \in X \qquad \langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t) \cdot g(t)\, dt$$

جداء داخلي؟

② أوجد $\|f\|$ حيث $f(x) = x^2$؟

③ أوجد $\|g\|$ حيث $g(x) = x - \frac{3}{4}$؟

④ هل $f(x) = x^2$ و $g(x) = x - \frac{3}{4}$ متعامدان؟

الحل:

① $\forall f,g,h \in X \qquad \alpha \in \mathbb{R}$

- $\langle f+h, g\rangle = \int_0^1 (f+h)(t) \cdot g(t)\, dt = \int_0^1 f(t) \cdot g(t) + h(t) g(t)\, dt$
$= \int_0^1 f(t) g(t)\, dt + \int_0^1 h(t) \cdot g(t)\, dt$
$= \langle f,g\rangle + \langle h,g\rangle$
- $\langle \alpha f, g\rangle = \int_0^1 (\alpha f)(t) g(t)\, dt = \alpha \int_0^1 f(t) \cdot g(t)\, dt = \alpha \langle f,g\rangle$
- $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t) \cdot g(t)\, dt \quad , \quad \overline{\langle g,f\rangle} = \overline{\int_0^1 g(t) \cdot f(t)\, dt} =$

$= \int_0^1 \overline{g(t)}\,.\,\overline{f(t)}\,dt = \int_0^1 g(t).\,f(t)\,dt = \int_0^1 f(t).\,g(t)\,dt = \langle f, g\rangle$

• $\langle f, f\rangle = \int_0^1 f^2(t)\,dt \geq 0$

من كون $f^2(t) \geq 0$

• $\langle f, f\rangle = 0 \iff \int_0^1 f^2(t)\,dt = 0 \iff f^2(t) = 0 \iff$

$f(t) = 0 \iff f = 0$

فمّا سبق نجد أنّ التطبيق المعطى يعرّف جداء داخلي

(2) - حساب $\|f\|$:

$\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$

$\|f\|^2 = \langle f, f\rangle = \int_0^1 f^2(x)\,dx = \int_0^1 x^4\,dx = \frac{1}{5}$

$\Rightarrow \|f\| = \frac{1}{\sqrt{5}}$

(3) - حساب $\|g\|$:

$\|g\| = \sqrt{\langle g, g\rangle} = \sqrt{\int_0^1 g^2(x)\,dx} = \sqrt{\frac{7}{48}}$

(4) - $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x).\,g(x)\,dx = \int_0^1 x^2\left(x - \frac{3}{4}\right)dx =$

$\int_0^1 x^3 - \frac{3}{4}x^2\,dx = 0 \Longrightarrow$ f و g متعامدان

مبرهنة فيثاغورث : ليكن X فضاء جداء داخلي و $x \perp y$ عندئذٍ :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

الاثبات :

$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle$

$+ \langle y, y\rangle = \|x\|^2 + 0 + 0 + \|y\|^2$

$\Longrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

ملاحظة : علاقة فيثاغورث في $\mathbb{R}^n$:

$\mathbb{R}^n$ فضاء جداء داخلي ولتكن $x_1, x_2, \dots\dots, x_n$ عناصر من $\mathbb{R}^n$ متعامدة مثنى مثنى عندئذٍ

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2$$

الاثبات :

$$\|\sum_{i=1}^{n} x_i\|^2 = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i , \sum_{i=1}^{n} x_i \rangle = \langle x_1 , x_2 \rangle + \dots + \langle x_n , x_n \rangle$$
$$= \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \dots + \|x_n\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$$

بحيث $\langle x_i , x_j \rangle = 0 \quad i \neq j$

مبرهنة: من أجل أي عنصرين x, y من فضاء جداء داخلي X لدينا
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$
وتسمى علاقة متوازي الأضلاع

الاثبات:

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y , x+y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle$$
$$\boxed{\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \|y\|^2} \quad (1)$$
$$\|x-y\|^2 = \langle x-y , x-y \rangle = \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle$$
$$\boxed{\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \|y\|^2} \quad (2)$$

بجمع العلاقتين (1) و (2) نجد المطلوب.

تعريف: فضاء هلبرت: هو فضاء جداء داخلي تام

مثال: $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{C}^n$ فضاءات هلبرت

نتيجة: كل فضاء هلبرت هو فضاء باناخ أما العكس ليس صحيح بالضرورة

ملاحظة: ℓ^p $(1 \leq p < \infty)$ هو فضاء المتتاليات (x_r) من الشكل $x_r = (x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, \dots)$ بحيث تكون السلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(r)}|^p < \infty$

ملاحظة:

ℓ^p $(p \neq 2)$ ليس فضاء هلبرت، لاثبات ذلك نأخذ مثال

$x = (1, 1, 0, 0, \dots) \in \ell^p$

$y = (1, -1, 0, 0, \dots) \in \ell^p$

ونعلم أنّ النظيم على ℓ^p ومعرّف بالعلاقة $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p}$

$\|x\| = (1+1)^{1/p} = 2^{1/p}$.

$\|y\| = (1+1)^{1/p} = 2^{1/p}$.

$x+y = (2,0,0,\dots\dots)$

$\|x+y\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i+y_i|^p\right)^{1/p} = 2$

$\|x-y\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i-y_i|^p\right)^{1/p} = 2$

$\Rightarrow \|x-y\|^2 + \|x+y\|^2 = 8$

$2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 2(2^{\frac{2}{p}} + 2^{\frac{2}{p}})$

نلاحظ عندما $p \neq 2$ فانّ

$\|x-y\|^2 + \|x+y\|^2 \neq 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

بالتالي علاقة متوازي الأضلاع غير محقّقة عندما $p \neq 2$

بالتالي $\ell^p_{p\neq 2}$ ليس جداء داخلي بالتالي ليس فضاء هلبرت

انتهت المحاضرة