كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : امثليات عددية

المحاضرة : الثانية /نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

مثال: استخدم طريقة البحث الذهبي لحل المسألة $\min f(x)$ حيث $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ في المجال $x \in [0, 1]$ بحيث شرط التوقف $d - c < eps = 0.06$

الحل: $a = 0$, $b = 1$, $r = 0.618034$

نعوض في قوانين c و d فنجد $c = 0.38197$, $d = 0.618034$

$f(c) = 4.67376 < f(d) = 4.90883 \Rightarrow b = d$

المجال الجديد $[0, 0.618034]$

$c = 0.23607 \Rightarrow f(c) = 4.69505$
$d = 0.38197 \Rightarrow f(d) = 4.673762$
$\Rightarrow f(c) > f(d) \Rightarrow a = c$

المجال الجديد $[0.23607, 0.618034]$

شرط التوقف $d - c = 0.1 > eps$ غير محقق

نتابع في المجال الجديد $a = 0.23607$, $b = 0.618034$

$c = 0.38197$, $d = 0.47214$

$f(c) = 4.67376 < f(d) = 4.724485$

$\Rightarrow b = d \Rightarrow$ المجال الجديد $[0.23607, 0.47214]$

شرط التوقف $d - c > eps$ غير محقق

نتابع في المجال الجديد $a = 0.23607$, $b = 0.47214$

$c = 0.32624$ $f(c) = 4.6668$
$d = 0.38197$ $f(d) = 4.6737$
$f(c) < f(d) \Rightarrow b = d$

شرط التوقف $0.05573 = d-c < eps$ بالتالي $p = c$

$F(p) = F(c) = 4.6668$

• **طريقة البحث التربيعي**: تعتمد الطريقة على تقريب دالة الهدف $f(x)$ بكثيرة حدود من الدرجة الثانية ثم إيجاد الحل الأمثل لكثيرة الحدود و الاستفادة من هذا الحل بجعله مركزاً لمجال جديد أصغر من المجال الأساسي، وعند تكرار هذه الفكرة عدة مرات سنصل إلى حل أمثل تقريبي

شرح الطريقة: لتكن لدينا الدالة $f(x)$ وحيدة الطور في المجال $[a,b]$ نضع $x_0 = a$ و $x_2 = b$ ونحسب x_1 مركز المجال

$$x_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{x_0+x_2}{2}$$

أصبح لدينا ثلاث نقاط $(x_0, f(x_0))$ ، $(x_1, f(x_1))$ ، $(x_2, f(x_2))$

حيث $h = x_1 - x_0$ أو $h = x_2 - x_0$ (ملاحظة: يجب مراجعة طريقة نيوتن غريغوري الأمامية من التحليل عددي 1) سنحصل على كثيرة حدود من الدرجة الثانية وهي دالة وحيدة وذلك باستخدام استيفاء نيوتن غريغوري

$$P_2(x) = f_0 + (x-x_0)\frac{\Delta f_0}{h} + (x-x_0)(x-x_1)\frac{\Delta^2 f_0}{2h^2}$$

$$P_2'(x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta f_0}{h} + (2x - x_0 - x_1)\frac{\Delta^2 f_0}{2h^2} = 0$$

سنوجد نقطة الاستقرار لكثيرة الحدود:

$$(2x - x_0 - x_1)\frac{\Delta^2 f_0}{2h^2} = \frac{-\Delta f_0}{h}$$

تذكير

• $\Delta f_0 = f_1 - f_0$

• $\Delta^2 f_0 = f_2 - 2f_1 + f_0$

$$2x - x_0 - x_1 = \frac{-\Delta f_0 \times 2h}{\Delta^2 f_0} = \frac{2h(f_0 - f_1)}{f_2 - 2f_1 + f_0}$$

$x_1 - h$

$$\Rightarrow x = x_1 + \frac{-h}{2} + \frac{2hf_0 - 2hf_1}{2[f_2 - 2f_1 + f_0]}$$

$$\Rightarrow x_p = x_1 + \frac{h(f_0 - f_2)}{2[f_2 - 2f_1 + f_0]}$$ (*) قانون محفظ

بأخذ المشتق الثاني نحصل على نهاية دنيا حيث

$$p_2''(x) = 2\frac{\Delta^2 f_0}{2h^2} = \frac{\Delta^2 f_0}{h^2} > 0$$

عندما $\Delta^2 f_0 = f_2 - 2f_1 + f_0 > 0$

$2f_1 < f_2 + f_0$

الخوارزمية: نحسب قيمتا الدالة عند x_1 و x_p أي نحسب $f(x_1)$ و $f(x_p)$ ونقارن بينهما

- اذا كانت $f(x_p) < f(x_1)$ نضع $x_1 = x_p$
- اذا كانت $f(x_p) > f(x_1)$ تبقى x_1 على حالها ، نأخذ $h = \frac{h}{2}$ ونحسب $x_0 = x_1 - h$ و $x_2 = x_1 + h$ ، ونتابع حساب x_p جديدة من القانون (*) نفسه.

مبدأ الازاحة: في الخوارزمية في الحالة العامة يعتمد مبدأ الازاحة على عدم تحقق الشرط $f_1 < f_0, f_2$ وهنا يتضمن حالتان:

1 - اما: $f_0 < f_1$ عندها تكون الازاحة نحو اليسار ويكون:

$x_0 = x_0 - h$ ، $x_1 = x_1 - h$ ، $x_2 = x_2 - h$

2 - أو أن يكون $f_2 < f_p$ عندها تكون الازاحة نحو اليمين

$x_0 = x_0 + h$ ، $x_1 = x_1 + h$ ، $x_2 = x_2 + h$

مثال: استخدم طريقة البحث التربيعي لحل المسألة $\text{Min} f(x)$ حيث $f(x) = x + \frac{3}{x^2}$ و $x \in [1, 2]$ بحيث شرط التوقف هو $h < 0.08$

الحل:

الخطوة

$h = x_1 - x_0 = x_2 - x_0 = 0.5$

$x_0 = 1$	$x_2 = 2$	$x_1 = \frac{x_0 + x_2}{2} = 1.5$
$f_0 = 4$	$f_2 = \frac{11}{4} = 2.75$	$f_1 = 2.8333$

$$\cdot\, x_{p_1} = x_1 + \frac{h(f_0 - f_2)}{2[f_2 - 2f_1 + f_0]} = 1.7884615 \in [1, 2]$$

$f(x_{p_1}) = 2.726373 < f_1 \Rightarrow x_1 = x_p$

الخطوة $h = \frac{h}{2} = 0.25 > 0.08$

$x_0 = 1.5384613$	$x_1 = x_p = 1.7224615$	$x_2 = x_1 + h = 2.038461$
$f_0 = 2.8059616$	$f_1 = 2.726373$	$f_2 = 2.760426$

$\cdot\, x_{p_2} = 1.8385487$

$f(x_{p_2}) = 2.726054 \Rightarrow f(x_p) < f_1 \Rightarrow x_1 = x_p$

الخطوة $h = \frac{h}{2} = \frac{1}{8} = 0.125 > 0.08$

$x_0 = 1.71136$	$x_1 = x_p$	$x_2 = 1.96136$
$f_0 = --$	$f_1 = ---$	$f_2 = ...$

$\cdot\, x_{p_3} = 1.82253$ $\qquad f(x_{p_3}) = 2.725705 < f_1$

$x_p = x_1$

$h = \frac{h}{2} = \frac{1}{16} = 0.0625 < 0.08 \Rightarrow$ شرط التوقف محقّق

$\Rightarrow x_p = x_1 = 1.82253$

• **طريقة البحث التكعيبي**: تعتمد الطريقة على تقريب دالة الهدف (الوحيدة الطور في المجال $[a, b]$) لكثيرة حدود هيرميت من الدرجة الثالثة (التكعيبية) في نقطتي طرفي المجال $[x_0, x_1]$ علماً بأنّ $a = x_0$ و $b = x_1$ ، تعطى بشروط هيرميت التكعيبية:

$h = x_1 - x_0$

$f_0 = p(x_0)$, $f_1 = p(x_1)$

$f_0' = p'(x_0)$, $f_1' = p'(x_1)$ ⊛

لتبسيط المسألة نكتب كثيرة الحدود بالشكل:

$$P_3(x) = a(x-x_0)^3 + b(x-x_0)^2 + c(x-x_0) + d$$

سنقوم أولاً بإيجاد النهاية الدنيا لهذه الحدودية ولذلك نشتق ونطابق بالصفر ثم نحل المعادلة : $P_3'(x) = 0$

$$P_3'(x) = 3a(x-x_0)^2 + 2b(x-x_0) + c = 0$$

لإيجاد جذور هذه المعادلة باستخدام Δ :

$$x - x_0 = \frac{-2b + \sqrt{4b^2 - 4(3ac)}}{6a}$$

$$x - x_0 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$$

لدينا $x - x_0 > 0$ وهنا يوافق اختيار الجذر الموجب ويكون عندئذٍ:

$$x_p = x_0 + \frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} \quad \text{--- } ①$$

سنعيّن المجاهيل a و b و c و d بالاعتماد على شروط استيفاء هيرميت التكعيبي

$$f_0 = p(x_0) = d \implies \boxed{f_0 = d}$$

$$f_0' = p'(x_0) = c \implies \boxed{f_0' = c}$$

$$f_1 = p(x_1) = a(x-x_0)^3 + b(x-x_0)^2 + f_0'\underbrace{(x-x_0)}_{=h} + f_0$$

$$\implies f_1 = ah^3 + bh^2 + f_0'h + f_0$$

$$ah^3 + bh^2 = f_1 - f_0'h - f_0 \quad ②$$

$$f_1' = P_3'(x) \implies 3ah^2 + 2hb = f_1' - f_0 \quad ③$$

بالحل المشترك بين ② و ③ نجد

$$\boxed{a = \frac{d_2 - 2d_3}{h}} \quad , \quad \boxed{b = 3d_3 - d_2}$$

$d_1 = \frac{f_1 - f_0}{h}$, $d_2 = \frac{f_1' - f_0'}{h}$, $d_3 = \frac{d_1 - f_0'}{h}$

نحسب قيمة x_p من العلاقة ① ونحسب قيمة الدالة عندها

إذا كانت $f'(x_p) > 0 \Leftarrow x_1 = x_p$ وإلا $f'(x_p) < 0 \Leftarrow x_0 = x_p$,

حالة خاصة: إذا كانت $f'(x_p) = 0$ الحل x_p هو الحل الدقيق للمسألة.

بتكرار حساب العلاقة ① مع هذه الاختبارات عدة مرات سنحصل على حل أمثل تقريبي ولكن سنتوقف عن التكرار عندما يتحقق أحد المعيارين

اما: $h < eps$ أو $Abs(f'(x_p)) < eps$

مثال: استخدم طريقة البحث التكعيبي لحل المسألة $Min f(x)$ في المجال $[1, 2]$ حيث $f(x) = x + \frac{3}{x^2}$ علماً أن شرط التوقف هو $|f'(x_p)| < 5.E-5$ ؟

الحل:

الخطوة1

$h = x_1 - x_0 = 1$

$x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $f_0 = 4$, $f_1 = 2.75$

$f_0' = -5$, $f_1' = 0.25$

$F'(x) = 1 - \frac{6}{x^3}$, $d_1 = -1.25$, $d_2 = 5.25$, $d_3 = 3.75$

$a = -2.25$, $b = 6$, $c = -5$, $d = 4$

من العلاقة ①: $x_p = 1.66667$

$f'(x_p) = -0.296 > 0.0005$ شرط التوقف غير محقق

وبما أنّ $f'(x_p) < 0$ بالتالي $x_0 = x_p$

يصبح المجال الجديد $[x_0, x_1] = [1.66667, 2]$

الخطوة2 $h = x_1 - x_0 = 0.33333$

$f_0 = 2.74667$, $f_1 = 2.75$

$f_0' = -0.296$, $f_1' = 0.25$

$d_1 = 0.0099$ | $a = -0.59397$
$d_2 = 1.63801$ | $b = 1.11599$
$d_3 = 0.918$ | $x_p = 1.81743$

$f'(x_p) = 5.10646 \times 10^{-4} = 0.0005109 > eps$

$f'(x_p) > 0 \implies x_1 = x_p$

$h = 0.15076$ حيث $[1.66667, 1.81743]$ المجال الجديد

f_0 f_1

f_0' f_1'

$d_1 = -0.1392$ $d_2 = 1.96673$ $d_3 = 1.04007$

التكملة وظيفة.

انتهت المحاضرة