كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : تبولوجيا2

المحاضرة : الثانية /نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

تعاريف:

لتكن A مجموعة كيفية من نقاط فضاء تبولوجي (X,τ)، و لتكن $x \in X$ نقطة كيفية، عندئذٍ

1. يقال عن x إنها نقطة لاصقة بالمجموعة A في (X,τ) إذا و فقط إذا كان:

$$V \cap A \neq \emptyset \quad ,\forall V \in V(x)$$

بكلام آخر: x إنها نقطة لاصقة بالمجموعة A في (X,τ) إذا و فقط إذا كانت كل مجاورة للنقطة x تتقاطع مع المجموعة A .

تسمى مجموعة النقاط اللاصقة بالمجموعة A لصاقة المجموعة A و نرمز لها بأحد الرمزين $\bar{A}\ ,\ cl(A)$.

2. . يقال عن x إنها نقطة تراكم للمجموعة A في (X,τ) إذا و فقط إذا كان:

$$V \cap A \neq \emptyset, \{x\} \qquad ,\forall V \in V(x)$$

بكلام آخر: x إنها نقطة تراكم للمجموعة A في (X,τ) إذا و فقط إذا كانت كل مجاورة للنقطة x تتقاطع مع المجموعة A بنقطة واحدة على الأقل مغايرة للنقطة x .

تسمى مجموعة جميع نقاط التراكم للمجموعة A مشتقة المجموعة A و نرمز لها $\acute{A}$.

3. يقال عن x إنها نقطة جبهية للمجموعة A في (X,τ) إذا و فقط إذا كان:

$$\begin{cases} V \cap A \neq \emptyset \\ V \cap (X \backslash A) \neq \emptyset \end{cases} ,\forall V \in V(x)$$

تسمى مجموعة جميع النقاط الجبهية للمجموعة A جبهية A و نرمز لها $bd(A)$.

ملاحظات:

1. إذا كانت A مجموعة كيفية من نقاط فضاء تبولوجي (X,τ)، عندئذٍ الاحتواء الآتي محقق دوماً $A \subseteq \bar{A}$

2. من تعريف النقطة اللاصقة و نقطة التراكم لمجموعة نجد أن كل نقطة تراكم لمجموعة هي نقطة لاصقة بها أي أن $\acute{A} \subseteq \bar{A}$ و العكس غير صحيح بصورة عامة كما يوضح المثال الآتي:

لتكن $X = \{a,b,c\}$ و لنعرف عليها $\tau = P(X)$ و لنأخذ $A = \{a\}$ نجد أن $a \notin \acute{A}$ لأن $A \cap X = \{a\}, X \in V(a)$ بينما $a \in \bar{A}$ بوضوح.

3. إذا كانت A,B مجموعتين كيفيتين من نقاط فضاء تبولوجي ما بحيث أن $A \subseteq B$ عندئذٍ: $\bar{A} \subseteq \bar{B}$ و كذلك $\acute{A} \subseteq \acute{B}$.

4. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

مبرهنة:

إذا كانت A مجموعة كيفية من نقاط فضاء تبولوجي (X,τ) عندئذٍ تكون المساواة الآتية محققة:

$$\bar{A} = A \cup \acute{A}$$

إثبات:

في أي فضاء تبولوجي لدينا العلاقات الآتية محققة دوماً $A \subseteq \bar{A}$ و $\acute{A} \subseteq \bar{A}$ و بالتالي فإن

$A \cup \acute{A} \subseteq \bar{A} \ldots . (1)$

من جهة ثانية إذا كانت $x \in \bar{A}$ نقطة كيفية، عندئذٍ إما أن تكون $x \in A$ و بالتالي $x \in A \cup \acute{A}$ أو $x \notin A$ و بالتالي $x \in X \backslash A$ و كونها نقطة لاصقة بالمجموعة A فإن: $V \cap A \neq \emptyset\, , \forall V \in V(x)$ بحسب تعريف النقطة اللاصقة و لكن $x \notin A$ بالتالي $x \notin V \cap A$ أي أن $V \backslash \{x\} \cap A \neq \emptyset\, , \forall V \in V(x)$ و هذا يعني أن $x \in \acute{A}$ و منه $x \in A \cup \acute{A}$

كلتا الحالتين أدت إلى كون $x \in A \cup \acute{A}$ و بمراعاة الاختيار الكيفي للنقطة x من لصاقة A نجد أن $\bar{A} \subseteq A \cup \acute{A} \ldots (2)$ من (2) و (1) نجد أن: $\bar{A} = A \cup \acute{A}$.

مبرهنة:

إذا كانت A مجموعة كيفية من نقاط فضاء تبولوجي (X,τ) فإن جبهية المجموعة A تعطى بالعلاقة: $bd(A) = \bar{A} \cap \overline{X \backslash A}$

مبرهنة:

إذا كانت A مجموعة كيفية من نقاط فضاء تبولوجي (X,τ) فإن لصاقة المجموعة A تساوي تقاطع جميع المجموعات المغلقة في (X,τ) و التي كل منها تحوي المجموعة A.

نتائج:

1. بما أن لصاقة أي مجموعة في أي فضاء تبولوجي هي تقاطع مجموعات مغلقة في هذا الفضاء فإنها مجموعة مغلقة فيه لأن أي تقاطع لمجموعات مغلقة هو مجموعة مغلقة في أي فضاء تبولوجي.
2. بما أن لصاقة أي مجموعة هي مجموعة مغلقة في أي فضاء تبولوجي و أن جبهيتها هي تقاطع لصاقتين فإن جبهية أي مجموعة هي مجموعة مغلقة في أي فضاء تبولوجي.
3. بما أن لصاقة أي مجموعة A تساوي تقاطع جميع المجموعات المغلقة في الفضاء التبولوجي و التي كل منها تحوي A فإنها أصغر مجموعة مغلقة في هذا الفضاء تحوي A.

4. إذا كانت A مجموعة كيفية من نقاط فضاء تبولوجي (X,τ)، فإن :

A مجموعة مغلقة في (X,τ) $A=\bar{A} \Leftrightarrow$

تعريف:

إذا كانت A مجموعة كيفية من نقاط فضاء تبولوجي (X,τ) و كانت x نقطة كيفية من نقاط المجموعة A ، يقال عن النقطة x إنها نقطة منعزلة في المجموعة A إذا و فقط إذا وجدت V_0 مجاورة للنقطة x بحيث يكون $A\cap V_0=\{x\}$

ندعو مجموعة جميع النقاط المنعزلة في المجموعة A منعزلة A و نرمز لها $Is(A)$.

ملاحظات:

1. ينتج من التعريف مباشرة أن $Is(A)\subseteq A$ من أجل كل مجموعة A.
2. من تعريف النقطة المنعزلة في مجموعة و نقطة التراكم لمجموعة نستنتج أن:

$$\acute{A}\cap Is(A)=\emptyset$$

تعريف:

إذا كانت A,B مجموعتين كيفيتين من نقاط فضاء تبولوجي (X,τ)، عندئذٍ:

1. يقال عن المجموعة A إنها كثيفة في المجموعة B إذا و فقط إذا كانت لصاقة A تحوي B:

A كثيفة في B $B\subseteq\bar{A} \Leftrightarrow$

2. يقال عن المجموعة A إنها كثيفة في كل مكان في (X,τ) إذا و فقط إذا كانت كثيفة في أي مجموعة جزئية $C\subseteq X$

A كثيفة في كل مكان في (X,τ) $C\subseteq\bar{A},\forall C\subseteq E \Leftrightarrow$

نتيجة:

بوضع $C=X$ نجد أن A كثيفة في كل مكان في (X,τ) $X\subseteq\bar{A} \Leftrightarrow$

و كون الاحتواء $X\supseteq\bar{A}$ محقق دوماً نستنتج أن:

A كثيفة في كل مكان في (X,τ) $\bar{A}=X \Leftrightarrow$

ملاحظة:

إذا كانت A كثيفة في كل مكان في (X,τ) $\bar{A}=X \Leftrightarrow$

و بفرض أن A مجموعة جزئية فعلية $(A\subset X)$ عندئذٍ: $\bar{A}=X\neq A$ و هذا يعني أن A ليست مجموعة مغلقة .

بالتالي تكون A مجموعة مغلقة و كثيفة بآن معاً في حالة وحيدة هي $A=X$.

تمرين (1):

لنأخذ الفضاء $(\mathbb{R}, |.|)$ و لنوجد كل مما يلي

$$\mathbb{N}^{\circ}, \overline{\mathbb{N}}, \mathbb{N}', \mathbb{Q}^{\circ}, \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}'$$

إيجاد $\mathbb{N}^{\circ}, \overline{\mathbb{N}}, \mathbb{N}'$:

نعلم أن كل مجموعة مفتوحة غير خالية في $(\mathbb{R}, |.|)$ هي مجال حقيقي مفتوح (أو اجتماع لمجالات مفتوحة) و بالتالي يضم أعداداً غير طبيعية و بالتالي إن المجموعة الخالية هي المجموعة المفتوحة الوحيدة في $(\mathbb{R}, |.|)$ المحتواة في $\mathbb{N}$ أي أن $\mathbb{N}^{\circ} = \emptyset$

$$\mathbb{N} = \cup_{n\in\mathbb{N}}\{n\} \Longrightarrow \overline{\mathbb{N}} = \overline{\cup_{n\in\mathbb{N}}\{n\}} = \cup_{n\in\mathbb{N}}\overline{\{n\}} \Longrightarrow \cup_{n\in\mathbb{N}}\{n\} = \mathbb{N}$$

و هذا يعني أن $\mathbb{N}$ مجموعة مغلقة في الفضاء $(\mathbb{R}, |.|)$.

يمكن إثبات أن $\mathbb{N}$ مجموعة مغلقة في الفضاء $(\mathbb{R}, |.|)$ بملاحظة أن متممتها مجموعة مفتوحة لأنها اجتماع لمجالات مفتوحة (أي مجموعات مفتوحة) في الفضاء $(\mathbb{R}, |.|)$.

نعلم أن $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}' \cup \mathbb{N}$ و منه $\mathbb{N}' \cup \mathbb{N} = \mathbb{N}$ و هذا يعني أن $\mathbb{N}' \subseteq \mathbb{N}$

من أجل كل عدد طبيعي n نلاحظ أن:

$\left]n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right[\cap \mathbb{N} = \{n\}$ و هذا يعني أن $n \notin \mathbb{N}'$ و بالتالي $\mathbb{N}' = \emptyset$.

إيجاد $\mathbb{Q}^{\circ}, \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}'$:

نعلم أن كل مجموعة مفتوحة غير خالية في $(\mathbb{R}, |.|)$ تضم عدد غير منته من الأعداد الحقيقية النسبية و غير النسبية و بالتالي إن المجموعة الخالية هي المجموعة المفتوحة الوحيدة في $(\mathbb{R}, |.|)$ المحتواة في $\mathbb{Q}$ أي أن $\mathbb{Q}^{\circ} = \emptyset$

لنفرض جدلاً أن $\overline{\mathbb{Q}} \neq \mathbb{R}$ هذا يعني وجود عنصر على الأقل $x \in \mathbb{R}$ بحيث أن $x \notin \overline{\mathbb{Q}}$ و بالتالي $x \in \mathbb{R}\backslash\overline{\mathbb{Q}}$ أي $x \in (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})^{\circ}$ و منه:

$\exists a, b \in \mathbb{R}: x \in]a, b[\subseteq \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ لكن نعلم أنه يوجد بين أي عددين حقيقيين عدد نسبي q

أي: $q \in]a, b[\subseteq \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ و هذا تناقض سببه الفرض الجدلي أن $\overline{\mathbb{Q}} \neq \mathbb{R}$ و بالتالي إن $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$، و هذا يعني أن $\mathbb{Q}$ كثيفة في $\mathbb{R}$.

أياً كان $x \in \mathbb{R}$ و أياً كانت $V_x \in V(x)$ أي توجد مجموعة مفتوحة T_x تحقق $x \in T_x \subseteq V_x$

بما أن $\mathbb{Q}$ كثيفة في $\mathbb{R}$ فإن T_x تضم عدد غير منته من الأعداد النسبية و بالتالي

$$T \cap \mathbb{Q}\backslash\{x\} \neq \emptyset \Rightarrow x \in \mathbb{Q}' \Rightarrow \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$$

تعريف:

ليكن (X, τ) فضاءً تبولوجياً كيفياً و $Y \subseteq X$ مجموعة جزئية من نقاطه

الأسرة $\tau_Y = \{T^*: T^* = T \cap Y; T \in \tau\}$ تعرف تبولوجيا على Y ندعوها التبولوجيا النسبية على Y أو أثر التبولوجيا τ على Y، و ندعو الثنائية (Y, τ_Y) فضاءً تبولوجياً جزئياً.

ملاحظات:

1. إن كلمة تبولوجيا جزئية لا تعني بالضرورة أنها أسرة جزئية من التبولوجيا τ أي أن الاحتواء $\tau_Y \subseteq \tau$ غير محقق بصورة عامة كما تبين الأمثلة الآتية:

a. لنأخذ الفضاء $(\mathbb{R}, \tau)$ حيث $\tau = \{\mathbb{R}, \emptyset\}$ و لتكن $Y = \mathbb{N}$ عندئذٍ تكون $\tau_{\mathbb{N}} = \{\mathbb{N}, \emptyset\}$ كما نلاحظ إن $\mathbb{N} \notin \tau$.

b. لنأخذ الفضاء $(\mathbb{R}, |.|)$ و لتكن $Y = [0,1]$ نجد $]-1,1[\cap [0,1] = [0,1[$ لكن من الواضح أن $[0,1[\in \tau_Y$ بينما لا تكون هذه المجموعة مفتوحة في $(\mathbb{R}, |.|)$.

و لو أخذنا $Y = \mathbb{N}$ عندئذٍ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ لدينا:

$]n-1, n+1[\cap \mathbb{N} = \{n\} \in \tau_{\mathbb{N}}$ و هذا يعني أن $\tau_{\mathbb{N}} = |.|_{\mathbb{N}} = P(\mathbb{N})$ لكن بوضوح نجد ان: $\{n\} \notin \tau_{|.|}$.

2. لنأخذ الفضاء $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$ حيث τ_{cof} تبولوجيا المتممات المنتهية على $\mathbb{R}$ و لنأخذ $Y = \{1,2,3\}$ لنوجد τ_Y التبولوجيا النسبية على Y :

أياً كانت $y \in Y$ إن المجموعة $T_y = \{y\} \cup (\mathbb{R} \backslash Y)$ مجموعة مفتوحة في الفضاء $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$ لأنها تستثني عنصرين فقط من $\mathbb{R}$ لذا فإن $Y \cap T_y = \{y\} \in \tau_Y$

بما أن $\{y\} \in \tau_Y, \forall y \in Y$ فإن أي مجموعة جزئية من Y هي مجموعة مفتوحة في الفضاء (Y, τ_Y) لأنها اجتماع لمجموعات وحيدة العنصر و هذا يعني أن $\tau_Y = P(Y)$

نلاحظ أن التبولوجيا النسبية على Y هي التبولوجيا القوية رغم أن الفضاء الكلي ليس مزوداً بالتبولوجيا القوية.

3. إذا كانت τ_Y تبولوجيا نسبية على Y عندئذٍ:

$$\tau_Y \subseteq \tau \iff Y \text{ مجموعة مفتوحة في } (X, \tau)$$

إثبات:

$\Leftarrow$: لدينا فرضاً $\tau_Y \subseteq \tau$ و لدينا دوماً $Y \in \tau_Y$ بالتالي $Y \in \tau$

$\Rightarrow$: لدينا بالفرض $Y \in \tau$، عندئذٍ $\forall T^* \in \tau_Y$ فإن $T^* = T \cap Y$ حيث $T \in \tau$ ومنه $T^* \in \tau$ لأنها تقاطع لمجموعتين مفتوحتين من τ، و بمراعاة الاختيار الكيفي للمجموعة T^* نجد أن $\tau_Y \subseteq \tau$.

4. إذا كان (Y, τ_Y) فضاءً تبولوجياً جزئياً من الفضاء التبولوجي (X, τ) عندئذٍ ندعو المجموعة A الجزئية من Y مجموعة مغلقة إذا و فقط إذا وجدت مجموعة مغلقة في (X, τ)

مثل F بحيث يكون $A = F \cap Y$.

طبعاً يبقى تعريف المجموعة المغلقة بأنها متممة المجموعة المفتوحة صحيحاً في الفضاءات التبولوجية الجزئية فإذا كانت $G = T \cap Y : T \in \tau$ مجموعة مفتوحة في الفضاء (Y, τ_Y) فإن:

$$Y\backslash G = Y\backslash(T \cap Y) = (Y\backslash T) \cup (Y\backslash Y) = (Y\backslash T) \cup \emptyset = Y\backslash T = Y \cap (X\backslash T)$$
$$= Y \cap F \quad : F \in \mathcal{F}$$

هذا يعني أن $Y\backslash G$ مجموعة مغلقة في الفضاء (Y, τ_Y).

5. كما أن τ_Y ليست بالضرورة أسرة جزئية من τ فإن $\mathcal{F}_Y$ ليست بالضرورة أسرة جزئية من أسرة المجموعات المغلقة $\mathcal{F}$ في الفضاء (X, τ)، و يكون لدينا:

$$\mathcal{F}_Y \subseteq \mathcal{F} \Leftrightarrow Y \text{ مجموعة مغلقة في } (X, \tau)$$

6. إذا كان (Y, τ_Y) فضاءً تبولوجياً جزئياً من الفضاء التبولوجي (X, τ) و $A \subseteq Y$، عندئذٍ نقول إن V^* مجاورة للمجموعة A في الفضاء (Y, τ_Y) إذا و فقط إذا وجدت مجاورة V للمجموعة A في الفضاء (X, τ) بحيث يكون $V^* = V \cap Y$.

7. ليكن (X, τ) فضاءً تبولوجياً و (Y, τ_Y) فضاءً تبولوجياً جزئياً منه و $A \subseteq Y$، نرمز بالرمز $\bar{A}, \mathring{A}_Y, \acute{A}_Y$ لمشتقة و داخلية و لصاقة المجموعة A في الفضاء الجزئي على الترتيب، و يكون لدينا:

a. $\bar{A}_Y = \bar{A} \cap Y$ و يكون $\bar{A}_Y = \bar{A} \Leftrightarrow Y$ مجموعة مغلقة في (X, τ)

b. $\mathring{A}_Y \supseteq \mathring{A} \cap Y$ ، الاحتواء المعاكس غير محقق بصورة عامة.

c. $\acute{A}_Y = \acute{A} \cap Y$.

تمرين(2):

لنعرف على مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ التبولوجيا:

$\tau = \{T \in P(\mathbb{Z}) : \{-9, -3, 0, 1, 12\} \subseteq T\} \cup \{\emptyset\}$ و لنأخذ

$X = \{-100, -99, \dots \dots \dots 5\}$ و $\mathbb{N}$ مجموعة الأعداد الطبيعية و المطلوب :

1. عين τ_X و $\mathcal{F}_X$ و $\tau_{\mathbb{N}}$ و $\mathcal{F}_{\mathbb{N}}$

2. إذا كانت $B = \{1, 2, 3, \dots \dots, 99\}$, $A = \{-9, -8, -7, \dots, 0\}$ حدد نوع المجموعة A في (X, τ_X) و نوع B في $(\mathbb{N}, \tau_{\mathbb{N}})$.

الحل: 1. لتكن $T_X \in \tau_X$ مجوعة كيفية عندئذٍ حسب تعريف الفضاء التبولوجي الجزئي: توجد مجموعة مفتوحة $T \in \tau$ بحيث $T_X = T \cap X$ و بما أن $T \in \tau$ فإن

$T \supseteq \{-9,-3,0,1,12\}$ و منه: $T \cap X \supseteq \{-9,-3,0,1,12\} \cap X$ أي

أن $T_X = T \cap X \supseteq \{-9,-3,0,1\}$ و بمراعاة الاختيار الكيفي للمجموعة T_X من τ_X نجد:

$\tau_X = \{T_X \in P(X): \{-9,-3,0,1\} \subseteq T_X\} \cup \{\emptyset\}$ و بالتالي:

$\mathcal{F}_X = \{F_X \in P(X): \{-9,-3,0,1\} \cap F_X = \emptyset\} \cup \{X\}$

. لتكن $T_{\mathbb{N}} \in \tau_{\mathbb{N}}$ مجوعة كيفية عندئذٍ حسب تعريف الفضاء التبولوجي الجزئي: توجد مجموعة مفتوحة $T \in \tau$ بحيث $T_{\mathbb{N}} = T \cap \mathbb{N}$ و بما أن $T \in \tau$ فإن $T \supseteq \{-9,-3,0,1,12\}$ و منه: $T \cap \mathbb{N} \supseteq \{-9,-3,0,1,12\} \cap \mathbb{N}$ أي أن

$T_{\mathbb{N}} = T \cap \mathbb{N} \supseteq \{1,12\}$ و بمراعاة الاختيار الكيفي للمجموعة $T_{\mathbb{N}}$ من $\tau_{\mathbb{N}}$ نجد أن:

$\tau_{\mathbb{N}} = \{T_{\mathbb{N}} \in P(\mathbb{N}): \{1,12\} \subseteq T_{\mathbb{N}}\} \cup \{\emptyset\}$ و بالتالي:

$\mathcal{F}_{\mathbb{N}} = \{F_{\mathbb{N}} \in P(\mathbb{N}): \{1,12\} \cap F_{\mathbb{N}} = \emptyset\} \cup \{\mathbb{N}\}$

2. بما أن $1 \notin A$ فإن $A \notin \tau_X$ فالمجموعة A ليست مجموعة مفتوحة في الفضاء (X, τ_X) و لدينا $\{-9,-3,0,1\} \cap A = \{-9,-3,0\} \neq \emptyset$ و $A \neq X$ بالتالي $A \notin \mathcal{F}_X$ فهي ليست مغلقة في هذا الفضاء.

بما أن $B \supseteq \{1,12\}$ فإن $B \in \tau_{\mathbb{N}}$ فهي مجموعة مفتوحة في $(\mathbb{N}, \tau_{\mathbb{N}})$ و كون $\{1,12\} \cap B = \{1,12\} \neq \emptyset$ فإن $B \notin \mathcal{F}_{\mathbb{N}}$ و $B \neq \mathbb{N}$ بالتالي $B \notin \mathcal{F}_{\mathbb{N}}$ فهي ليست مغلقة في هذا الفضاء.

انتهت المحاضرة 2