كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : ميكانيك2

المحاضرة : الثانية/نظري/

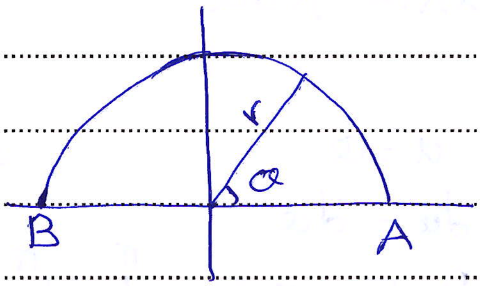
{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

مركز كتل بعض الأجسام الشهيرة:

* مركز كتلة سلك نصف دائري:

سؤال: أوجد مركز كتلة سلك نصف دائري نصف قطره R ، كثافته $\rho = a.s$ حيث: a ثابت ، s: طول قوس من السلك مقاس من نقطة محددة.



الحل: حسب قانون مركز الكتل:

$$x_c = \frac{\int x \rho \, ds}{\int \rho \, ds}$$

وهنا تبرز مشكلة وهي علاقة x مع s لذلك نحاول الحل باستخدام الاحداثيات القطبية:

$$x_c = \frac{\int_0^{\pi} R\cos\alpha \; aR\alpha \; R\,d\alpha}{\int_0^{\pi} aR\alpha \; R\,d\alpha} = \frac{2R}{\pi^2}\int_0^{\pi} \alpha \cos\alpha \, d\alpha$$

نكامل بالتجزئة:

$$u = \alpha \Rightarrow du = d\alpha \quad , \quad dv = \cos\alpha \, d\alpha \Rightarrow v = \sin\alpha$$

$$\Rightarrow x_c = \frac{2R}{\pi^2}\left[\alpha \sin\alpha \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin\alpha \, d\alpha\right]$$

$$= \frac{2R}{\pi^2}\left[\cos\alpha\right]_0^{\pi} = \frac{-4R}{\pi^2}$$

$$y_c = \frac{\int y \rho \, ds}{\int \rho \, ds}$$

$$= \frac{\int_0^{\pi} R\sin\alpha \; aR\alpha \; R\,d\alpha}{\int_0^{\pi} aR\alpha \; R\,d\alpha} = \frac{2R}{\pi^2}\int_0^{\pi} \alpha \sin\alpha \, d\alpha$$

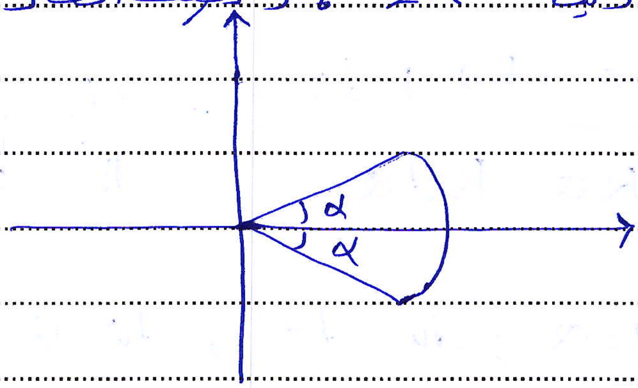
تكامل بالتجزئة :

$$\begin{cases} u = \alpha \\ du = d\alpha \end{cases} \qquad dv = \sin\alpha \, d\alpha \qquad v = -\cos\alpha$$

$$\Rightarrow y_c = \frac{2R}{\pi^2}\left[-\alpha\cos\alpha\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos\alpha \, d\alpha\right]$$

$$= \frac{2R}{\pi^2}\left[\pi\right] = \frac{2R}{\pi}$$

تمرين: أوجد مركز كتلة سلك دائري متجانس يشكل قوس زاوية 2α ، و نصف القطر R كما في الشكل:



الحل:

متجانس ⇐ كثافة ثابتة

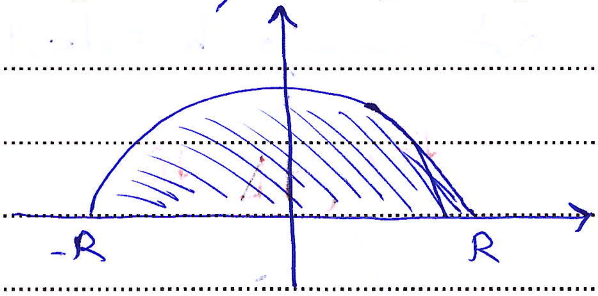
$$X_c = \frac{\int x \rho \, ds}{\int \rho \, ds}$$

$$= \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} R\cos\alpha \, R \, d\alpha}{R(2\alpha)} = \frac{R}{2\alpha}[2\sin\alpha] = \frac{R\sin\alpha}{\alpha}$$

حساب y_c: إن $y_c = 0$ لأن xx' هو محور تناظر للجسم المتجانس.

* هـ مركز كتلة صفيحة نصف دائرية.

سؤال: أوجد مركز كتلة صفيحة نصف دائرية متجانسة.



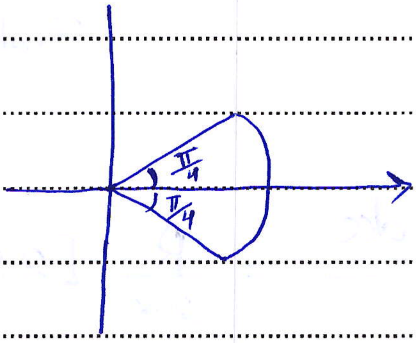
الحل: بما أن المحور yy' هو محور تناظر للصفيحة ⇐ $x_c = 0$

$$y_c = \frac{\iint y \, dx \, dy}{\iint dx \, dy}$$

$$= \frac{2\int_{-R}^{R}\int_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} y \, dy \, dx}{\pi R^2} = \frac{1}{\pi R^2}\int_{-R}^{R} R^2 - x^2 \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi R^2}\left[R^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R} = \frac{\left[\frac{4}{3}R^3\right]}{\pi R^2} = \frac{4R}{3\pi}$$

وظيفة: أوجد مركز كتل صفيحة ربع دائرية متجانسة كما في الشكل:



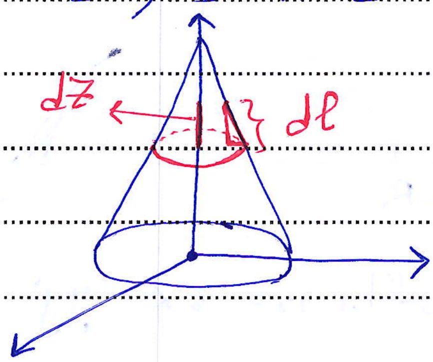
الجواب النهائي:

$$x_c = \frac{4\sqrt{2}\,R}{3\pi}$$

$$y_c = 0$$

* مركز كتل سطح جانبي لمخروط:

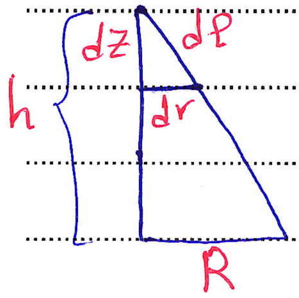
سؤال: أوجد مركز كتل السطح الجانبي لمخروط دوراني قائم متجانس ارتفاعه h ونصف قطره R



الحل: لأن للمخروط محور تناظر $oz \Leftarrow x_c = y_c = 0$

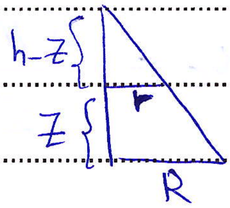
حساب z_c:

$$z_c = \frac{\iint z\,ds}{\iint ds} = \frac{\iint z\,r\,d\theta\,dl}{\iint r\,d\theta\,dl}$$



$$\frac{dZ}{h} = \frac{d\ell}{\sqrt{R^2+h^2}} = \frac{dr}{R}$$

$$d\ell = \frac{\sqrt{R^2+h^2}}{h}\, dZ$$



$$Z_C = \frac{2\pi \int_0^h Z R\left(\frac{h-Z}{h}\right)\frac{\sqrt{R^2+h^2}}{h}\, dZ}{2\pi \int_0^h R\,\frac{(h-Z)}{h}\,\frac{\sqrt{R^2+h^2}}{h}\, dZ}$$

$$= \frac{\int_0^h Zh - Z^2\, dZ}{\int_0^h h - Z\, dZ} = \frac{\left[\frac{Z^2}{2}h - \frac{Z^3}{3}\right]_0^h}{\left[hZ - \frac{Z^2}{2}\right]_0^h} = \frac{\frac{1}{6}h^3}{\frac{h^2}{2}} = \frac{h}{3}$$

وظيفة: أوجد مركز كتل صفيحة بشكل نصف قطع ناقص
متجانسة نصف قطره ~~4B~~ على x

مساحة نصف القطع الناقص: $\frac{\pi ab}{2}$

الجواب $\frac{4B}{3\pi}$

مركز كتل عدة أجسام:

بفرض O مبدأ الاحداثيات و C هي مركز الكتل لعدة
أجسام $S_1, S_2, \dots, S_n$ يكون لدينا:

$$\sum m_i \vec{OC} = \sum m_i \vec{OP_i}$$

$$\vec{OC} = \frac{M_1 \vec{OC_1} + M_2 \vec{OC_2} + \cdots + M_n OC_n}{M_1 + \cdots + M_n}$$

$$x_C = \frac{\sum M_i x C_i}{\sum M_i}$$

M_i: كتلة الجسم S_i

C_i: مركز عطالة الجسم S_i

* مركز ثقل مجموعة نقط أو أجسام مادية:

$$\vec{OC} = \frac{\sum m_i \vec{OP_i}}{\sum m_i}$$

إذا ضربنا البسط والمقام بمقدار g الجاذبية:

$$\Rightarrow \vec{OC} = \frac{\sum m_i g \vec{OP_i}}{\sum m_i g}$$; $m_i g$: هو ثقل النقطة المادية

انتهت المحاضرة