كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل عددي1

المحاضرة : الأولى/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

Subject

Year: Month: Date: NOTE BOOK

التحليل العددي نظري - السنة الثانية - الرياضيات

المحاضرة الأولى : الأخطاء أنواعها ومصادرها

مقدمة :

يعتبر التحليل العددي من أهم موضوعات الرياضيات التطبيقية لعلاقته المباشرة بالتطور التكنولوجي، حيث يتم الاستفادة من القدرات الهائلة للحواسيب في إيجاد حلول تقريبية لمسائل رياضية يصعب حلها بالطرق التحليلية والجبرية المعتادة، بالإضافة إلى ذلك حل بعض المعادلات التفاضلية مع شروط ابتدائية معينة أو حل بعض المعادلات التفاضلية الجزئية PDE وغيرها إلى ذلك من المسائل الرياضية.

لحل مثل هذه المسائل نبحث عن خوارزميات وهي طرق محددة الخطوات للوصول من البيانات المعطاة إلى نتائج أو حلول تقريبية للحلول الدقيقة، والحل التقريبي يمكن أن يكون كثيرة حدود (مثل مسائل الاستيفاء) أو أن يكون عدديا كجذر لمعادلة جبرية أو قيمة تكامل محدد.

عند عملية البحث عن حل تقريبي للمسألة نتعامل غالبا مع أعداد تقريبية أو قياسات مختلفة (بشكل طفيف) عن القياسات الأصلية وبذلك ينتج ظهور أنواع مختلفة من الأخطاء المرتكبة نصنفها وفق ما يلي :

1- أخطاء الصيغ : هي أخطاء ناتجة عن الصيغ والعلاقات المستخدمة للتعبير عن الحوادث الفيزيائية أو القوانين الهندسية عندما تحتوي هذه العلاقات على ثوابت تقريبية مثل قانون مساحة الدائرة $S = \pi r^2$ حيث نعتبر 3.14 قيمة تقريبية للثابت π.

2- أخطاء الاقتطاع : وهي الأخطاء التي تنشأ عن استبدال عملية منتهية بعملية لا نهائية فمثلا عندما نكتب الدوال على شكل متسلسلات لانهائية وعند إجراء العمليات الرياضية عليها نكتفي بعدد منته من حدود تلك المتسلسلات مما يؤدي لظهور أخطاء الاقتطاع.

مثلا منشور التابع الأسي هو $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$

NOTE BOOK

Sudject
Year: Month: Date: NOTE BOOK

3- الأخطاء الابتدائية:

وهي الأخطاء في البيانات الأولية التي يتم إدخالها للآلة وتنتج عن قياس بعض المقادير في معظم الأحيان تقريبياً حيث أن دقة القياس تتبع لحساسية الأجهزة المستخدمة في القياس، كما قد تكون هذه الأخطاء ناتجة عن حواس الشخص الذي يقوم بتلك القياسات.

4- أخطاء التدوير (التقريب):

ليكن لدينا العدد $x = 0.a_0a_1a_2 \dots a_{n-1}a_n$ ونريد تقريب هذا العدد مكتفين بـ n رقم على يمين الفاصلة العشرية عندئذ نحصل على العدد المدور لـ x ونرمز له $\bar{x}$ وفق الشكل

$$\bar{x} = 0.a_0a_1a_2 \dots a'_{n-1}$$

حيث يحدد a'_{n-1} وفق القاعدة التالية:

* $a_n > 5 \Leftarrow a'_{n-1} = a_{n-1} + 1$
* $a_n < 5 \Leftarrow a'_{n-1} = a_{n-1}$
* a_n وأيضاً نميز الحالتين:

$a_n = 5$ ، a_{n-1} عدد زوجي $\Leftarrow a'_{n-1} = a_{n-1}$

$a_n = 5$ ، a_{n-1} عدد فردي $\Leftarrow a'_{n-1} = a_{n-1} + 1$

وفي هذه الحالة مقدار الخطأ المرتكب لا يتجاوز 5×10^{-n} حيث أن الخطأ المرتكب يمثل الفرق بين القيمة الدقيقة والقيمة التقريبية ويكتب $x - \bar{x}$ وقد يكون هذا المقدار موجباً أو سالباً.

* القيمة المطلقة للخطأ المرتكب تعرف بالخطأ المطلق ونرمز له

$$\delta_x = |x - \bar{x}|$$

وهو مقدار موجب دوماً.

* نعرف الخطأ النسبي بأنه نسبة الخطأ المطلق إلى القيمة المطلقة الحقيقية للعدد نرمز له e_x ونكتب

$$e_x = \frac{\delta_x}{|x|}$$

NOTE BOOK

مثال: لنأخذ $x = 0.235348$ عندئذ:

$$\bar{x} = 0.23534 \Rightarrow |x-\bar{x}| \le 5\times10^{-6}$$

$$\delta_x \le 5\times10^{-6}$$

$$\bar{\bar{x}} = 0.2353 \Rightarrow |\bar{x}-\bar{\bar{x}}| \le 5\times10^{-5}$$

حساب الأخطاء لتوابع في عدة متغيرات:

لتكن لدينا الدالة $y = f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ عندئذ يُعطى الخطأ المطلق في حساب الدالة f عند النقطة المدورة $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ بالعلاقة:

$$(\delta f)_{max} \le \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \cdot \delta x_i$$

كما يُحسب الخطأ النسبي من العلاقة:

$$(e_f)_{max} \le \frac{\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \cdot \delta x_i}{|f|} = \frac{(\delta f)_{max}}{|f|}$$

مثال: لتكن لدينا الدالة $f(x,y,z)=x^2yz^3$ احسب الخطأ المطلق والنسبي في حساب قيمة الدالة في النقطة المدورة $(x_0,y_0,z_0)=(0.1,0.13,0.101)$.

الحل:

$$(\delta f)_{max} \le \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} \cdot \delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} \cdot \delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} \cdot \delta z$$

حيث: $\delta x \le 5\times10^{-2}$ ، $\delta y \le 5\times10^{-3}$ ، $\delta z \le 5\times10^{-4}$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} = \left|2xyz^3\right|_{(0.1,\,0.13,\,0.101)} = 0.00002678$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} = \left|x^2z^3\right|_{(0.1,\,0.13,\,0.101)} = 0.00001030$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} = \left|3x^2yz^2\right|_{(0.1,\,0.13,\,0.101)} = 0.00003978$$

Sudject
Year: Month: Date: NOTE BOOK

$$(\delta f)_{max} \leqslant (0.00002678)(5\times10^{-2}) + (0.00001030)(5\times10^{-3}) + (0.00003978)(5\times10^{-4}) = 0.0000139$$

$$|f| = (0.1)^2(0.13)(0.101)^3 = 0.0000133$$

ومنه يكون الخطأ النسبي

$$(e_f)_{max} \leqslant \frac{(\delta f)_{max}}{|f|}$$

$$(e_f)_{max} \leqslant \frac{0.0000139}{0.0000133} = 1.045112782$$

مثال:

لتكن لدينا الدالة $f(x,y) = e^x \cos(x+y)$ احسب الخطأ المطلق والنسبي في حساب قيمة الدالة في النقطة $(x_0, y_0) = (0.73, 1.2)$ المدورة.

الحل:

$$(\delta f)_{max} \leqslant \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \cdot \delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \cdot \delta y$$

حيث $\delta x \leqslant 5\times10^{-3}$, $\delta y \leqslant 5\times10^{-2}$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = \left| e^x \cos(x+y) - e^x \sin(x+y)\right|_{(0.73, 1.2)}$$

$$= \left| e^x (\cos(x+y) - \sin(x+y))\right|$$

$$= \left| e^{0.73} \times (\cos(1.93) - \sin(1.93))\right|$$

$$= 2.67209$$

$$= \cancel{1.2131}$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = \left| -e^x \sin(x+y)\right| = e^{0.73} \times \sin(1.93)$$

$$= 1.9-4264$$

Sudject

Year: Month: Date: NOTE BOOK

$$(\delta f)_{max} \leq 2.67209 \times 5 \times 10^{-3} + 1.94264 \times 10^{-2} \times 5$$

$$(\delta f)_{max} \leq 0.11049$$

$$|f|_{(x_0, y_0)} = \left|e^{0.73} \cos(0.73 + 1.2)\right| = 0.72945$$

ومنه يكون الخطأ النسبي

$$(e_f)_{max} \leq \frac{(\delta f)_{max}}{|f|}$$

$$(e_f)_{max} \leq \frac{0.11049}{0.72945} = 0.15147$$

NOTE BOOK