كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : بنى جبرية2

المحاضرة : الاولى/عملي/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

التمرين الأول:

$G = Q \setminus \{-1\}$ حيث Q مجموعة الأعداد الكسرية نعرّف على G عملية ثنائية بالشكل التالي:

$\forall a, b \in G$

$a * b = a + b + a.b$

عندئذٍ $(G, *)$ زمرة تبديلية.

الحل:

(1) G مغلقة بالنسبة للعملية $*$ وضوحاً.

(2) لنثبت أنّ

$\forall a, b, c \in G$

$(a*b)*c = a*(b*c)$

$\ell_1 = (a*b)*c = (a+b+a.b)*c =$

$a+b+c+a.b+(a+b+ab).c$

$= a+b+c+a.b+ac+bc+abc.$

$\ell_2 = a*(b*c) = a*(b+c+bc)$

$= a+b+c+bc+a(b+c+bc)$

$= a+b+c+bc+ab+ac+abc$

$\ell_1 = \ell_2.$

③ العنصر الحيادي في G بالنسبة للعملية $*$ هو $e=0$

$\forall a\in G:\ a*0=a+0+0a=\boxed{a}$

$0*a=0+a+0.a=a$

$a*0=0*a=a$

④ المعكوس:

$\forall a\in G\ \exists a'=\frac{-a}{1+a}\in G$

$a*a'=a-\frac{a}{a+1}-\frac{a^2}{a+1}=0 \Rightarrow a'*a=0$

⑤ $\forall a,b\in G$

$a*b=a+b+a.b=b+a+b.a=b*a$

$\Leftarrow (G,*)$ زمرة تبديلية

التمرين الثاني:

$$G=\left\{\begin{bmatrix} a & a\\ a & a\end{bmatrix};\ 0\neq a\in\mathbb{R}\right\}$$

حيث R مجموعة الأعداد الحقيقية ~~الثب~~ والمطلوب:

إثبت أنه G زمرة تبديلية بالنسبة لجداء المصفوفات

الحل:

① G مغلقة بالنسبة لجداء المصفوفات

$\forall A,B\in G,\quad A=\begin{bmatrix} a & a\\ a & a\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} b & b\\ b & b\end{bmatrix}$

$A.B=\begin{bmatrix} 2ab & 2ab\\ 2ab & 2ab\end{bmatrix}\in G$

② بما أنه ثمة جداء المصفوفات تجميعي إذنه عملية جداء المصفوفات تجميعي .

③ الحيادي في G بالنسبة لعملية جداء المصفوفات

$$e = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\forall A \in G \Rightarrow Ae = \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} = A$$

$$eA = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} = A.$$

④ لكلّ عنصر $A = \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} \in G$ معكوس في G هو

$$A' = \begin{bmatrix} \frac{1}{4a} & \frac{1}{4a} \\ \frac{1}{4a} & \frac{1}{4a} \end{bmatrix}$$

$$A.A' = \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{1}{4a} & \frac{1}{4a} \\ \frac{1}{4a} & \frac{1}{4a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = e$$

$$A'A = \begin{bmatrix} \frac{1}{4a} & \frac{1}{4a} \\ \frac{1}{4a} & \frac{1}{4a} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = e.$$

التمرين الثالث: $(\mathbb{Z}_8, \oplus_8)$ المطلوب جد $O(2)$ و $O(4)$

$\mathbb{Z}_8 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$1.2 = 2 \neq 0$

$2.2 = 2 \oplus_8 2 = 4 \neq 0$

$2.2.2 = 2 \oplus_8 2 \oplus_8 2 = 6 \neq 0$

$2 \oplus_8 2 \oplus_8 2 \oplus_8 2 = \overline{8} = 0 = e$

$O(2) = 4$

$O(4) = O(2)^2 = \dfrac{O(2)}{gcd(2, O(2))} = \dfrac{4}{gcd(2, O(2))} = \dfrac{4}{2} = 2$

التمرين ٤:

لتكن لدينا الزمرة $(U(14), \otimes_{14})$ حيث

$U(14) = \{1, 3, 5, 9, 11, 13\}$

جد $O(5)$

$U(n) = \{x : 1 \leq x < n,\ gcd(x, n) = 1\}$

$5^1 = 5 \neq 1$

$5^2 = 5 \otimes_{14} 5 = 11 \neq 1$

$5^3 = 5 \otimes_{14} 5 \otimes_{14} 5 = 13 \neq 1$

$5^4 = 5 \otimes_{14} 5 \otimes_{14} 5 \otimes_{14} 5 = 9 \neq 1$

$5^5 = 5 \otimes_{14} 5 \otimes_{14} 5 \otimes_{14} 5 \otimes_{14} 5 = 3 \neq 1$

$5^6 = 3 \otimes_{14} 5 = 1 = e$

$O(5) = 6$

التمرين الخامس :

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2a & 0 \end{pmatrix} , a \in Q , a \neq 0 \right\}$$

اثبت أنّ G زمرة تبديلية بالنسبة لعملية جداء المصفوفات

1) G مغلقة

$\forall A, B \in G$

$A, B \in G$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2a & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & 0 \\ 2b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 2ab & 0 \end{pmatrix}.$$

ومنه G مغلقة.

2) خاصّة جداء المصفوفات هي تجميعية ومنه العملية تجميعية.

3) الحيادي : $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$a \times e = a$

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 2a & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e_1 & 0 \\ e_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 2a & 0 \end{bmatrix}.$$

4) النظير :

$$A' = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ \frac{1}{a} & 0 \end{bmatrix} ; A' \times A = e.$$

5) ضرب المصفوفات ليس تبديلي ولكن هنا العملية تبديلية لأنّ $ab = ba$

انتهت المحاضرة