كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل رياضي4

المحاضرة : الاولى/عملي/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

التمرين الأول: لتكن A مجموعة ما غير خالية وليكن:

$d: A \times A \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 ; & x = y \\ 1 ; & x \neq y \end{cases}$$

أثبت أنه (A,d) فضاء متري

الحل

① من تعريف d نلاحظ أنه:

$d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

ومنه الشرط الأول محقق.

② $d(x,y) \overset{?}{=} d(y,x)$

نميز حالتين:

الحالة الأولى $x = y$

$$\left.\begin{aligned} d(x,y) &= 0 \\ d(y,x) &= 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$ الشرط الثاني محقق في الحالة 1

الحالة 2: $x \neq y$

$$\left.\begin{aligned} d(x,y) &= 1 \\ d(y,x) &= 1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$ ~~ومنه~~ الشرط الثاني محقق في الحالة 2.

ومنه من الحالتين 1 و 2 الشرط الثاني محقق .

③ $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

نناقش حالتين

الحالة 1:

* $x \neq y$ و $x \neq z$ و $y \neq z$

$d(x,y) = 1$ و $d(x,z) = 1$ و $d(y,z) = 1$

$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

$1 \leq 1 + 1$

$1 \leq 2$

(** $x \neq y$ و $x \neq z$ و $y = z$

$d(x,y) = 1$ & $d(y,z) = 0$ & $d(x,z) = 1$

$d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$

$1 \leq 1 + 0$

$1 \leq 0$

ومنه * و ** الشرط الثاني محقق في الحالة 1 .

الحالة 2:

$x = y \Leftarrow d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

محققة دوماً

من تحقق الشروط الثلاثة السابقة نجد أنه (A,d)

فضاء متري .

التمرين الثاني: $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية ولنعرف

تطبيق d بالشكل: $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$d(x,y) = |x - y| \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$.

الحل:

1) من تعريف d نجد $d(x,y) \geq 0$

$$d(x,y)=0 \iff \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2}=0$$

$$\iff \sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2=0 \iff (y_i-x_i)^2=0 \iff y_i-x_i=0$$

$$\iff y_i=x_i \; ; \; i=1,\dots,n$$

والشرط الأول محقق.

2) $\forall x,y \in \mathbb{R}^n ,\; x=(x_1,\dots\dots,x_n)$

$y=(y_1,\dots,y_n)$

$d(x,y)=d(y,x)$:

$$d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}=d(y,x)$$

والشرط الثاني محقق.

3) $d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$

$\forall x,y,z \in \mathbb{R}^n$

(I) $$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i-x_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2}$$

ولنبرهن صحة العلاقة (I)

نستخدم مبرهنة كوشي بنكوفسكي:

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}$$

نضرب طرفي المتراجحة بـ 2 ونضيف

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2+\sum_{i=1}^{n}b_i^2.$$

$$2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i \leq 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}$$

أثبت أنه (R,d) فضاء متري

الحل

① من تعريف d نلاحظ أنه: $d(x,y) \geq 0$

$d(x,y)=0 \Rightarrow |x-y|=0 \Rightarrow x-y=0 \Rightarrow x=y$

والشرط الأول محقق

② $d(x,y) \overset{?}{=} d(y,x)$

$d(x,y)=|x-y|=|-(y-x)|=|-1|.|y-x|$

$= |y-x|.1 = |y-x| = d(y,x)$

والشرط الثاني محقق

③ $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$

$d(x,y)=|x-y|=|x-z+z-y| \leq |x-z|+|z-y|$

$\leq |x-z|+|z-y|$

$\leq d(x,z)+d(z,y)$

والشرط الثالث محقق

من تحقق الشروط الثلاث نجد أنه (R,d) فضاء متري

التمرين التالي:

الفضاء اللاقليدي R^n ذو n بعد

$R^n = R \times R \times \dots \times R = \{x=\{x_1,x_2,\dots,x_n\} ; x \in R\}$

ولنعرف على R^n التطبيق $d: R^n \times R^n \longrightarrow R^+ \cup \{0\}$

$d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2}$

في $(y_i-x_i)^2=(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\dots+(y_n-x_n)^2$

برهن أنه تطبيق d مسافة على R و (R^n,d) فضاء متري

$$\sum_{i=1}^{n} 2a_ib_i + \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leq 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} 2a_ib_i + a_i^2 + b_i^2 \leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^2 \leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\right)^2$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

$a_i = z_i - y_i$

$b_i = y_i - x_i$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (z_i - y_i + y_i - x_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (z_i - x_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (z_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$$

$$\Longrightarrow d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

والشرط الثالث محقق.

منه تحقق الشروط الثلاثة نجد أنّ (R^n, d) فضاء

متري

انتهت المحاضرة