كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثانية**

المادة : توابع خاصة

المحاضرة : الثانية /نظري/د.علي أسد

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الفيزياء

مقرر: التوابع الخاصة
المحاضرة: الثانية
د. علي أسد

التحويلات التكاملية

Integral Transformations

من أهم التحويلات التكاملية التي نتطرق لدراستها في هذا الفصل هو تحويل فورييه وتحويل لابلاس، ويستخدم هذين التحويلين لحل المعادلات التفاضلية والتكاملية وكذلك لحل مسائل القيم الابتدائية التي تتكون من معادلات تفاضلية من المرتبة الأولى ومن المرتبة الثانية.

✓ **تحويل فورييه (Fourier transform):** يرمز لتحويل فورييه بالرمز $\mathscr{F}(f)$ أو $\hat{f}$ ويعطى بالعلاقة الآتية:

$$\mathscr{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iwt}\,dt \coloneqq F(w) \qquad (1)$$

أما تحويل فورييه العكسي فيكون له الشكل الآتي:

$$\mathscr{F}^{-1}[F(w)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(w)e^{-iwx}\,dw \coloneqq f(x) \qquad (2)$$

❖ **تحويل فورييه للتوابع الزوجية:**

نعلم أن التابع f يكون زوجياً إذا حقق الشرط:

$$f(-x) = f(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

ولدينا من تعريف تحويل فورييه:

$$\mathscr{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iwt}\,dt \coloneqq F(w)$$

يمكن كتابة هذا العلاقة بالشكل الآتي:

$$F(w) = \int_{-\infty}^{0} f(t)e^{iwt}\,dt + \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{iwt}\,dt \qquad (3)$$

نستبدل t بـ $-t$ في التكامل الأول نحصل على:

$$F(w) = -\int_{-\infty}^{0} f(-t)e^{-iwt}\,dt + \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{iwt}\,dt \qquad (4)$$

نضع $f(-t) = f(t)$ فنحصل على:

$$F(w) = -\int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-iwt}\,dt + \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{iwt}\,dt$$

$$= \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-iwt}\,dt + \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{iwt}\,dt$$

$$= \int_{0}^{+\infty} 2f(t)\frac{e^{iwt}+e^{-iwt}}{2}\,dt$$

$$= 2\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos(wt)\,dt \qquad (5)$$

تسمى العلاقة (5) تحويل فورييه للتوابع الزوجية ويرمز له بالرمز $F_c(w)$ ونكتب:

$$\mathscr{F}_c[f(x)] = \int_{0}^{+\infty} f(t)\cos(wt)\,dt \ := F_c(w) \quad (6)$$

إذاً نستنتج أن:

$$F(w) = 2F_c(w) \qquad (7)$$

الآن نوجد تحويل فورييه العكسي بالتعويض في العلاقة:

$$\mathscr{F}^{-1}[F(w)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(w)e^{-iwx}\,dw := F^{-1}(w)$$

نحصل على:

$$F^{-1}(w) = \frac{2}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} 2F_c(w)e^{-iwx}\,dw \qquad (8)$$

بما أن:

$$\cos(wx) = \frac{e^{iwx}+e^{-iwx}}{2} \qquad , \quad \sin(wx) = \frac{e^{iwx}-e^{-iwx}}{2i}$$

إذاً نستنتج أن:

$$\cos(wx) - i\sin(wx) = e^{-iwx}$$

بالتعويض في العلاقة (8) نجد:

$$F^{-1}(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}F_c(w)\cos(wx)\,dw-\frac{2i}{\pi}\int_0^{+\infty}F_c(w)\sin(wx)\,dw \qquad (9)$$

بمساواة الجزئيين الحقيقي والتخيلي في طرفي العلاقة (9) نحصل على:

$$F^{-1}(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}F_c(w)\cos(wx)\,dw \qquad (10)$$

تسمى العلاقة (10) تحويل فورييه العكسي للتوابع الزوجية ويرمز لها بـ $F_c^{-1}(w)$

- **تحويل فورييه للتوابع الفردية:**

نعلم أن التابع f يكون فردياً إذا حقق الشرط الآتي:

$$f(-x)=-f(x) \qquad \forall\, x\in\mathbb{R}$$

نستبدل t بـ $-t$ في التكامل الأول من العلاقة (3) نحصل على:

$$F(w)=-\int_{-\infty}^{0}f(-t)e^{-iwt}\,dt+\int_0^{+\infty}f(t)e^{iwt}\,dt \qquad (11)$$

نضع $f(-t)=-f(t)$ فنحصل على:

$$\begin{aligned}F(w)&=\int_{-\infty}^{0}f(t)e^{-iwt}\,dt+\int_0^{+\infty}f(t)e^{iwt}\,dt\\&=-\int_0^{+\infty}f(t)e^{-iwt}\,dt+\int_0^{+\infty}f(t)e^{iwt}\,dt\\&=2i\int_0^{+\infty}f(t)\,\frac{e^{iwt}-e^{-iwt}}{2i}\,dt\\&=2i\int_0^{+\infty}f(t)\sin(wt)\,dt \quad (12)\end{aligned}$$

تسمى العلاقة (12) تحويل فورييه للتوابع الفردية ويرمز لها بالرمز $F_s(w)$ أي أن:

$$\mathscr{F}_s[f(x)]=\int_0^{+\infty}f(t)\sin(wt)\,dt \;:=F_s(w)$$

وبذلك نستنتج:

$$F(w)=2iF_s(w) \qquad (13)$$

الآن نوجد تحويل فورييه العكسي للتوابع الفردية من خلال التعويض في العلاقة:

$$\mathscr{F}^{-1}[F(w)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(w)e^{-iwx}\,dw \coloneqq F^{-1}(w)$$

فنحصل على:

$$F^{-1}(w) = \frac{2}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} 2iF_s(w)e^{-iwx}\,dw \qquad (14)$$

بتعويض العلاقة:

$$\cos(wx) - i\sin(wx) = e^{-iwx}$$

نحصل على:

$$F^{-1}(w) = \frac{2i}{\pi}\int_{0}^{+\infty} F_s(w)\cos(wx)\,dw + \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} F_s(w)\sin(wx)\,dw \qquad (15)$$

بمساواة الجزئيين الحقيقي والتخيلي في طرفي العلاقة (15) نحصل على:

$$F^{-1}(w) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} F_s(w)\sin(wx)\,dw \qquad (16)$$

تسمى هذه العلاقة تحويل فوربيه العكسي للتوابع الفردية ويرمز له بالرمز $F_s^{-1}(w)$

❖ **أمثلة:**

مثال (1): إذا كان التابع f يعطى على صورة:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

أوجد تحويل فورييه للتابع f

الحل: من التعريف لدينا

$$F(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iwx}\,dx = \int_{-a}^{+a} 1.\,e^{iwx}\,dx$$

$$\left.\frac{e^{iwx}}{iw}\right|_{-a}^{+a} = \frac{e^{iwa} - e^{-iwa}}{iw} = \frac{2\sin(wa)}{w}$$

مثال (2): أوجد تحويل فورييه للتابع $f(x) = e^{-x^2} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$

الحل: من التعريف لدينا:

$$F(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iwx}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{iwx}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2 - iwx)}\, dx$$

بإتمام ما داخل القوس إلى مربع كامل:

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x^2 - iwx + \frac{i^2 w^2}{4} - \frac{i^2 w^2}{4}\right)}\, dx$$

$$= e^{-\frac{w^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x - \frac{iw}{2}\right)^2}\, dx$$

نغير المتحول:

$$u = x - \frac{iw}{2} \Rightarrow du = dx$$

$$F(w) = e^{-\frac{w^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\, du$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\, du = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-u^2}\, du$$

هذا التكامل هو تكامل بواسون من الشكل:

$\int_0^{+\infty} u^n e^{-\alpha u^2}\, du = \frac{n!}{\frac{n}{2}! 2^{n+1}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{n+1}}}$ ، حيث n زوجي

$$I = 2\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \sqrt{\pi}$$

$$F(w) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{w^2}{4}}$$

<u>مثال (3):</u> أوجد تحويل فورييه للتابع:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \le 0 \end{cases}$$

<u>الحل:</u> من التعريف لدينا:

$$F(w)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iwx}\,dx$$

لكن لدينا $f(x)=0$ من أجل $x\leq 0$ وبالتالي:

$$F(w)=\int_{0}^{+\infty} e^{-ax}e^{iwx}\,dx$$

$$=\int_{0}^{+\infty} e^{-(a-iw)x}\,dx$$

$$=-\frac{1}{a-iw}e^{-(a-iw)x}\Big|_{0}^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{a-iw}$$

مثال (4): إذا كانت $a>0$, $F(w)=e^{-aw^2}$ أوجد $f(x)$

الحل: لدينا من تعريف تحويل فورييه العكسي:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(w)e^{-iwx}\,dw$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-aw^2}e^{-iwx}\,dw$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-aw^2}(\cos(wx)-i\sin(wx))\,dw$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-aw^2}\cos(wx)\,dw-\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-aw^2}\sin(wx)\,dw$$

$$=I_1(x)+I_2(x)\qquad (17)$$

حيث:

$$I_1(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-aw^2}\cos(wx)\,dw=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} e^{-aw^2}\cos(wx)\,dw$$

$$I_2(x)=0$$

لإيجاد قيمة التكامل $I_1(x)$ نفاضل الطرفين بالنسبة لـ x بمعنى آخر نحول المعادلة التكاملية إلى معادلة تفاضلية بشروط ابتدائية ثم نقوم بحل المسألة الأخيرة لإيجاد قيمة التكامل $I'_1(x)$ كالآتي:

$$I'_1(x) = -\frac{w}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-aw^2}\sin(wx)\,dw \qquad (18)$$

بعد إجراء عملية التكامل بالتجزئة نحصل على:

$$I'_1(x) = -\frac{w}{\pi}\left[\sin(wx)\left(\frac{-1}{2aw}\right)e^{-aw^2}\right]_0^{+\infty} + \frac{w}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\frac{-1}{2aw}\right)xe^{-aw^2}\,cos(wx)\,dw$$

$$= -\frac{x}{2\pi a}\int_0^{+\infty} e^{-aw^2}\,cos(wx)\,dw = -\frac{x}{2a}I_1(x)$$

وبذلك نحصل على:

$$I'_1(x) + \frac{x}{2a}I_1(x) = 0 \qquad (19)$$

نوجد الآن شرط ابتدائي عندما $x = 0$ نحصل على:

$$I_1(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-aw^2}\,cos(0)\,dw = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-aw^2}\,dw = \frac{1}{\pi}I(0) \qquad (20)$$

حيث:

$$I(0) = \int_0^{+\infty} e^{-aw^2}\,dw \qquad (21)$$

وهو تكامل بواسون الشهير ويعطى بالشكل:

$$I(0) = \int_0^{+\infty} e^{-aw^2}\,dw \quad = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad (22)$$

بتعويض (22) في (20) نجد:

$$I_1(0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a}}$$

إذاً نحصل على المسألة الآتية:

$$\left.\begin{aligned} I'_1(x) + \frac{x}{2a}I_1(x) = 0 \\ I_1(0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

نوجد حل المسألة (23) كالآتي:

$$\frac{dI_1}{dx} + \frac{x}{2a}I_1 = 0 \;\Rightarrow \frac{dI_1}{dx} = -\frac{x}{2a} \Rightarrow \frac{dI_1}{I_1} = -\frac{x}{2a}dx$$

بتكامل الطرفين نحصل على:

$$\ln I_1(x) = -\frac{x^2}{4a} \Rightarrow I_1(x) = ce^{-\frac{x^2}{4a}}$$

باستعمال الشرط الابتدائي نجد:

$$c = I_1(0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a}}$$

$$\Rightarrow I_1(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} e^{-\frac{x^2}{4a}}$$

بالتعويض في (17) نجد:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} e^{-\frac{x^2}{4a}}$$

- **خواص تحويل فورييه:**

نظرية (1): نفرض أن $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ وكذلك $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ توابع قابلة للتكامل على $\mathbb{R}$ وبفرض أن a, b, k ثوابت فإنه لأي $w \in \mathbb{R}$ يكون:

1) **خاصية الخطية:**

$$\mathscr{F}(af + bg) = a\hat{f} + b\hat{g}$$

2) **خاصية الإزاحة:**

$$\mathscr{F}\big(f(x+k)\big)(w) = e^{ikw}\hat{f}(w)$$

3) **خاصية المقياس:**

$$\mathscr{F}(f(kx)(w) = \frac{1}{|k|}\hat{f}\left(\frac{w}{k}\right) \quad ,k \neq 0$$

<u>نظرية (2) الالتفاف:</u> إذا كان f و g تابعين قابلين للتكامل على $\mathbb{R}$ نعرف التفاف تابعين $f * g$ بأنه:

$$(f * g)(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, g(x-u) du \quad ,\forall x \in \mathbb{R}$$

فإن تحويل فورييه هو:

$$\mathscr{F}[(f * g)(x)](w) = \mathscr{F}[\mathrm{f}]\mathscr{F}[\mathrm{g}] = F(w)G(w)$$

<u>الإثبات:</u> بما أن

$$\mathscr{F}[(f*g)(u)] = \mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, g(x-u)du\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iwx}\, dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, g(x-u)du$$

بتغيير ترتيب التكامل ينتج أن:

$$\mathscr{F}[(f*g)(u)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)du \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iwx}\, g(x-u)dx$$

الآن نفرض $v = x - u$ إذاً $x = u + v$ وبذلك يكون:

$$\mathscr{F}[(f*g)(u)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)du \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iw(u+v)}\, g(v)dv$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{iwu}du \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iwv}\, g(v)dv := F(w)G(w)$$