كلية العلوم

القسم : **الكيمياء**

السنة : **الاولى**

المادة : رياضيات عامة4

المحاضرة : الثانية /ن+ع/

- ليكن لدينا U_n متتالية نقول عن U_n أنها:

1) اذا كانت $U_{n+1} \geq U_n$ كانت المتتالية متزايدة عاماً.
اذا كانت $U_{n+1} > U_n$ كانت المتتالية متزايدة.

2) اذا كانت $U_{n+1} \leq U_n$ كانت المتتالية متناقصة عاماً.
اذا كانت $U_{n+1} < U_n$ كانت المتتالية متناقصة.

3) اذا كانت $U_{n+1} = U_n$ كانت المتتالية ثابتة.

هام 1: U_n متتالية حسابية a, b, c ثلاث حدود متتالية من هذه المتتالية:

$$2b = a + c$$

a, b, c, d, e *

$$4c = a + b + d + e$$

هام 2: U_n متتالية هندسية a, b, c ثلاث حدود متتالية منها

$$b^2 = a \cdot c$$

مثال: ليكن لدينا U_n متتالية حسابية $U_{10} = 5$ أوجد:

$$U_7 + U_{10} + U_{30} + U_{33}$$

الحل: حدود من متتالية حسابية

$$U_{10} + U_{30} = 2U_{20}$$

$$2 \times 5 = 10$$

$$U_7 + U_{33} = 2U_{20}$$

$$2 \times 5 = 10$$

نلاحظ أن: $U_7 + U_{10} + U_{30} + U_{33}$

$= 10 + 10 = 20$

* $U_7 + U_{20} + U_{30}$

$2U_{20} = U_7 + U_{30}$

$= 2 \times 5 = 10$

دراسة اطراد متتالية:

طرق لدراسة اطراد متتالية:

1) الطريقة المباشرة: $\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1} \rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$

((دائماً الأصغر مقاما أكبر).

2) الطرح (الفرق): نقارن مع الصفر

* $U_{n+1} - U_n > 0 \longrightarrow$ كانت المتتالية متزايدة

* $U_{n+1} - U_n < 0 \longrightarrow$ كانت المتتالية متناقصة

3) القسمة: نقارن مع الواحد:

* $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1 \longrightarrow$ كانت المتتالية متزايدة

* $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1 \longrightarrow$ كانت المتتالية متناقصة

4) التابع: نفرض تابع $U_{n+1} = F(U_n)$ ندرس التابع أي (نشتق التابع) ونقارن الناتج مع الصفر

اذا كان $F'(X) > 0$ كانت المتتالية متزايدة والتابع متزايد تماماً.

اذا كان $F'(X) < 0$ كانت المتتالية متناقصة والتابع متناقص تماماً.

ملاحظة: في حال استخدام نفرض تابع يجب أن تكون المتتالية حصراً صريحة.

مثال: ادرس اطراد متتالية:

$U_n = \frac{n}{n+1} - 1$

الحل:

ج) حسب U_{n+1} : $U_{n+1} = \frac{U_n + 1}{U_n + 2} - 1$

نفرض تابع $F(x)$:

$$F(x) = \frac{x+1}{x+2} - 1$$

ندرس التابع $F(x)$ أي اشتقاق التابع:

$$F'(x) = \frac{(x+1)'(x+2) - (x+2)'(x+1)}{(x+2)^2} - 0$$

$$F'(x) = \frac{(x+2) - (x+1)}{(x+2)^2} = \frac{x+2-x-1}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{1}{(x+2)^2} > 0$$

نجد أن المتتالية متزايدة تماماً لأن التابع متزايد تماماً.

المتتاليات المحدودة:

نقول عن المتتالية أنها محدودة إذا كان العدد يحقق $M \in R$

الشرط:

$$\begin{cases} \forall n \in R \\ \Rightarrow |U_n| \leq M \end{cases}$$

نقول عن المتتالية أنها محدودة من الأعلى إذا حققت:

$$\forall n \in R \longrightarrow U_n \leq M$$

نقول عن المتتالية أنها محدودة من الأدنى إذا حققت:

$$\forall n \in R \longrightarrow U_n \geq M$$

مثال: لتكن لدينا المتتالية: $U_n = 4 - \frac{1}{n}$; $n \geq 1$

ادرس محدودية هذه المتتالية:

الحل:

الحل: لدراسة محدودية المتتالية نتبع الخطوات الآتية: $U_n = 4 - \frac{1}{n} : n \geq 1$

1) نفرض تابع:

$$F(x) = 4 - \frac{1}{x} \quad : x \geq 1$$

2) ندرس اطراد المتتالية (التابع) على مجموعة تعريفه $[1, \infty[$:

$$\lim_{x \to 1} F(x) = 4 - 1 = 3$$

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = 4 - \frac{1}{\infty} = 4 - 0 = 4$$

3) مشتق التابع:

$$F(x) = 4 - \frac{1}{x}$$

$$F'(x) = 0 - \frac{(1)'(x) - (x)'(1)}{(x)^2} = -\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2} > 0$$

بما أن التابع متزايد تماماً فإن المتتالية U_n متزايدة تماماً.

4) نشكل جدول اطراد للتابع:

x	1 $\quad\quad\quad\quad$ ∞
$F'(x)$	+ + + + + +
$F(x)$	$3 \nearrow 4$

التابع متزايد تماماً

حيث: $3 \leq U_n < 4$

فإن $3 \leq F(x) < 4$

محدودة من الأدنى $\quad$ محدودة من الأعلى

التقارب: شرط كوشي للاقتراب:

نقول عن متتالية أنها متقاربة من العدد a إذا حققت الشرط:

"شرط كوشي" مهم:

$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists n_0 \in N \rightarrow |U_n - a| < \varepsilon$

حتى تكون المتتالية متقاربة لازم تكون نهايتها عند ∞ هي عدد a

$\lim_{n \to \infty} U_n = a$

$\forall n \geq n_0$

للتوضيح: $|U_n - a| < \varepsilon$

صحيحة $n \geq 50$

غير صحيحة $n = 30$

مثال: اثبت أن المتتالية $U_n = \frac{1}{n+1}$ أنها متقاربة:

الحل:

$\lim_{n \to \infty} U_n = \frac{1}{\infty} = 0$

$\Rightarrow a = 0$

يوجد

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in N ;$ شرط كوشي

$|U_n - a| < \varepsilon \ \forall n > n_0$

$\left| \frac{1}{n+1} \right| < \varepsilon$

$\frac{1}{n+1} < \varepsilon$

$\left| \frac{1}{n+1} \right| < \frac{1}{n} = \varepsilon$

$$U_n = \frac{n+1}{n}$$

$$\lim_{n \to \infty} U_n = 1$$

كوشي

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in N , |U_n - a| < \varepsilon$$

$$\forall n \geq n_0$$

$$|U_n - a| < \varepsilon = \left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon$$

$$\frac{n+1-n}{n} < \varepsilon$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$n \geq n_0$$

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0}$$

نفرض

$$\varepsilon = \frac{1}{n_0}$$