كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثانية**

المادة : توابع خاصة

المحاضرة : الاولى /نظري/د.علي أسد

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الفيزياء

مقرر: التوابع الخاصة
المحاضرة: الأولى
د. علي أسد

تابع غاما

Gamma Function

يعتبر تابع غاما تعميماً للعامل $n!$ وبالتالي توجد تطبيقات كثيرة في الفيزياء تستخدم هذا التابع، على سبيل المثال التوزعات الاحتمالية، يعطى التعريف الأساسي لتابع غاما بالشكل الآتي:

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{n-1} dt \quad , \quad n > 0 \qquad n \in R$$

❖ **بعض خواص تابع غاما:**

1) $\boldsymbol{\Gamma(1) = 1}$

الإثبات: من التعريف نجد:

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt \; = \; -e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$$

2) $\boldsymbol{\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)}$

الإثبات: من التعريف لدينا:

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{n-1} dt \quad , \quad n > 0$$

إذاً يكون:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{n} dt \quad , \quad n > 0$$

بإجراء عملية التكامل بالتجزئة نحصل على:

$$u = t^n \Rightarrow du = nt^{n-1} \quad , \quad dv = e^{-t} \Rightarrow v = -e^{-t}$$

$$\Gamma(n+1) = -e^{-t}t^{n}]_{0}^{+\infty} + n\int_{0}^{+\infty} e^{-t}t^{n-1}dt$$

$$\Rightarrow \ \Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n)$$

ملاحظة: يمكن كتابة تابع غاما بالشكل الآتي:

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}$$

3) $\boldsymbol{\Gamma(n+1) = n!} \qquad \boldsymbol{\forall\, n \in N}$

<u>الإثبات:</u> من الخاصية 2 لدينا:

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n)$$

وبالتالي:

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = (n-1)(n-2)(n-3)\Gamma(n-3)$$

$$= (n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots\ldots 3.2.1 = n!$$

4) من أجل $\boldsymbol{0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}}$ يكون:

$$\boldsymbol{\frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)} = 2\int_{0}^{\pi/2} \cos\theta^{2n-1}\,\sin\theta^{2m-1}\ d\theta}$$

<u>الإثبات:</u> من تعريف تابع غاما:

$$\Gamma(n) = \int_{0}^{+\infty} e^{-t}t^{n-1}dt$$

نفرض $t = u^2$ وبالتالي: $dt = 2udu$

$$\Gamma(n) = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-u^2}\,u^{2(n-1)}\,udu$$

$$= 2\int_{0}^{+\infty} e^{-u^2}\,u^{2n-1}\,du$$

وبالمثل نجد من أجل $m > 0$

$$\Gamma(m) = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-v^2}\,v^{2m-1}\,dv$$

وبذلك يكون:

$$\Gamma(n)\Gamma(m) = 4\int_0^{+\infty} e^{-(u^2+v^2)}\, u^{2n-1}\, v^{2m-1}\, dudv$$

وباستعمال الإحداثيات القطبية:

$$u = r\cos\theta \quad , \quad v = r\sin\theta \quad , u^2 + v^2 = r^2 \quad , \quad 0 < r < +\infty \quad , \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

بالتعويض نجد:

$$\Gamma(n)\Gamma(m) = 4\int_0^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} r^{2n+2m-2}\, rdr\, \cos\theta^{2n-1} \sin\theta^{2m-1}\, d\theta$$

$$= \left[\int_0^{+\infty} r^{2(n+m-1)}\, 2re^{-r^2} dr\right] \times 2\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta^{2n-1} \sin\theta^{2m-1}\, d\theta\right]$$

في التكامل الأول نفرض $r^2 = w$ فنحصل على:

$$\Gamma(n)\Gamma(m) = \underbrace{\left[\int_0^{+\infty} w^{n+m-1}\, e^{-w} dw\right]}_{\Gamma(n+m)} \times 2\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta^{2n-1} \sin\theta^{2m-1}\, d\theta\right]$$

وبذلك نحصل من العلاقة أعلاه على:

$$\frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta^{2n-1} \sin\theta^{2m-1}\, d\theta$$

أمثلة:

مثال (1): أثبت أن $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

الحل: من الخاصية 4 يكون:

$$\frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta^{2n-1} \sin\theta^{2m-1}\, d\theta$$

بوضع $n = m = \frac{1}{2}$ في العلاقة أعلاه نحصل على:

$$\frac{\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2}{\Gamma(1)} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta$$

$$\Rightarrow \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = 2\,.\frac{\pi}{2} = \pi \quad \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

مثال (2): أثبت أن:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-lnx}} = \sqrt{\pi}$$

الحل: نفرض أن $t = -\ln x$ وبالتالي $t = \ln\frac{1}{x}$ وبذلك يكون:

$$e^t = \frac{1}{x} \Rightarrow x = e^{-t} \quad \Rightarrow dx = -e^{-t}dt$$

حدود التكامل: عندما $x \to 0$ فإن $t \to +\infty$ و عندما $x \to 1$ فإن $t \to 0$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-lnx}} = -\int_{+\infty}^0 e^{-t}\, t^{-\frac{1}{2}}dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{-\frac{1}{2}}dt = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

مثال (3): احسب قيمة:

1) $\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}$

2) $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi}$

3) $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \times \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$

4) $\frac{\Gamma\left(\frac{8}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{\frac{5}{3}\times\frac{2}{3}\times\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{10}{9}$

تابع بيتا

Beta Function

يعرف تابع بيتا بالصيغة الآتية:

$$\beta(m,n) = \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}\,dt \quad , \qquad m,n \in R \ , m>0 \ , n>0$$

❖ خواص تابع بيتا:

1) التابع بيتا هو تابع متماثل:

$$\boldsymbol{\beta(m,n) = \beta(n,m) \quad , \quad m>0 \ , n>0}$$

<u>الإثبات:</u> من تعريف تابع بيتا:

$$\beta(m,n) = \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}\,dt$$

بفرض أن $u = 1-t$ إذاً يكون $dt = -du$ ، نغير حدود التكامل: عندما $t \to 0$ فإن $u \to 1$ وعندما $t \to 1$ فإن $u \to 0$، وبذلك نحصل:

$$\beta(m,n) = -\int_1^0 (1-u)^{m-1}u^{n-1}\,dt = \beta(n,m)$$

2) لدينا الخاصية الآتية:

$$\boldsymbol{\beta(m,n) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta^{2m-1} \sin\theta^{2n-1}\,d\theta}$$

<u>الإثبات:</u> من تعريف تابع بيتا:

$$\beta(m,n) = \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}\,dt$$

نفرض أن $t = \cos^2\theta$ فإن $dt = -2\cos\theta\sin\theta\,d\theta$ ، وحدود التكامل عندما $t \to 0$ فإن $\theta \to \frac{\pi}{2}$ وعندما $t \to 1$ فإن $\theta \to 0$، وبذلك نحصل على:

$$\beta(m,n) = -2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos\theta^{2m-2} \sin\theta^{2n-2} \cos\theta \sin\theta \ d\theta$$

$$= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta^{2m-1} \sin\theta^{2n-1} \, d\theta$$

3) الخاصية الآتية توضح العلاقة بين تابع غاما وتابع بيتا:

$$\boldsymbol{\beta(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}}$$

<u>الإثبات:</u> من الخاصية 2 لدينا:

$$\beta(m,n) = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta^{2m-1} \sin\theta^{2n-1} \, d\theta \qquad (1)$$

وباستعمال الخاصية 4 من خواص تابع غاما أي:

$$\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta^{2m-1} \sin\theta^{2n-1} \ d\theta \qquad (2)$$

نلاحظ أن الطرف الأيمن من العلاقة (1) يساوي الطرف الأيمن من العلاقة (2) وبذلك يكون:

$$\beta(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

4) لدينا الخاصية الآتية:

$$\boldsymbol{\beta(m,1-m) = \int_{0}^{+\infty} \frac{u^{m-1}}{u+1} du}$$

<u>الإثبات:</u> من تعريف تابع بيتا

$$\beta(m,n) = \int_{0}^{1} t^{m-1}(1-t)^{n-1} \, dt$$

نفرض أن: $u = \frac{t}{1-t}$ وبذلك يكون $t = \frac{u}{u+1}$ إذاً: $dt = \frac{du}{(u+1)^2}$، وحدود التكامل: عندما $t \to 0$ فإن $u \to 0$ وعندما $t \to 1$ فإن $u \to +\infty$، وبذلك نحصل:

$$\beta(m,1-m) = \int_{0}^{+\infty} \frac{u^{m-1}}{(u+1)^{m-1}} \frac{1}{(u+1)^{-m}} \frac{du}{(u+1)^2}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{u^{m-1}}{u+1} du$$

قاعدة لحساب بعض التكاملات

$$\int_0^{+\infty} \frac{u^{m-1}}{u+1} du = \Gamma(m)\Gamma(1-m) = \frac{\pi}{\sin m\pi}$$

تمارين: احسب التكاملات الآتية:

1) $\int_0^{\infty} x^3 e^{-x} dx$
2) $\int_0^{\infty} x^6 e^{-2x} dx$
3) $\int_0^{\infty} \sqrt{y} e^{-y^3} dy$
4) $\int_0^{\infty} x^m e^{-ax^n} dx \quad a > 0$
5) $\int_0^{\pi} cos^4\theta \, d\theta$
6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4\theta \, cos^5\theta \, d\theta$
7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^6\theta \, d\theta$
8) $\int_0^{\infty} t^{-\frac{3}{2}}(1-e^{-t})dt$
9) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}$
10) $\int_0^1 x(1-x^3)^{\frac{1}{3}} dx$
11) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan\theta} \, d\theta$
12) $\int_{-1}^1 \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/2} dx$

الحل:

$$\int_0^{\infty} \boldsymbol{x^3 e^{-x} dx} = \Gamma(3+1) = 3! = 6$$

$$\int_0^{\infty} \boldsymbol{x^6 e^{-2x} dx}$$

نفرض: $x^6 = \frac{u^6}{64}$, $2x = u \Rightarrow du = 2\,dx$ (تبقى حدود التكامل نفسها)

$$\int_0^{\infty} x^6 e^{-2x} dx = \frac{1}{128}\int_0^{\infty} u^6 e^{-u} du = \frac{1}{128}\,\Gamma(6+1) = \frac{6!}{128} = \frac{45}{8}$$

$$\int_0^\infty \sqrt{y} e^{-y^3} dy$$

نغير المتحول:

$$y^3 = u \quad \Rightarrow y = u^{1/3} \Rightarrow dy = \frac{1}{3} u^{-2/3} du \quad , \sqrt{y} = u^{1/6}$$

$$\int_0^\infty \sqrt{y} e^{-y^3} dy = \int_0^\infty u^{1/6} e^{-u} \frac{1}{3} u^{-2/3} du = \frac{1}{3} \int_0^\infty u^{-1/2} e^{-u} du$$

$$= \frac{1}{3} \Gamma\left(-\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{3}$$

$$\int_0^\infty x^m e^{-ax^n} dx \quad a > 0$$

$$ax^n = u \quad \Rightarrow x^n = \frac{1}{a} u \quad \Rightarrow x = a^{-\frac{1}{n}} u^{\frac{1}{n}} \quad , \quad x^m = a^{-\frac{m}{n}} u^{\frac{m}{n}} \quad , dx = \frac{1}{n} a^{-\frac{1}{n}} \; u^{\frac{1-n}{n}} du$$

$$\int_0^\infty x^m e^{-ax^n} dx = \frac{1}{n} a^{-\frac{m+1}{n}} \int_0^\infty u^{\frac{m-n+1}{n}} e^{-u} du$$

$$= \frac{1}{n} a^{-\frac{m+1}{n}} \Gamma\left(\frac{m-n+1}{n} + 1\right) = \frac{1}{n} a^{-\frac{m+1}{n}} \Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$$

$$\int_0^\pi \cos^4\theta \, d\theta$$

$$2m - 1 = 4 \quad \Rightarrow m = \frac{5}{2} \quad , \qquad 2n - 1 = 0 \; \Rightarrow \; n = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^\pi \cos^4\theta \, d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta \, d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{\frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \pi}{2} = \frac{3\pi}{8}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta \cos^5\theta \, d\theta$$

$$2n - 1 = 4 \quad \Rightarrow n = \frac{5}{2} \quad , \quad 2m - 1 = 5 \quad \Rightarrow \quad m = 3$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4\theta\ cos^5\theta\ d\theta = \frac{1}{2}\beta(n,m) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma(3)}{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma(3)}{\frac{9}{2}\times\frac{7}{2}\times\frac{5}{2}\times\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} = \frac{8}{315}$$

$$\int_{\mathbf{0}}^{\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}} \boldsymbol{sin^6\theta\ d\theta}$$

$$2n-1=6\ \Rightarrow n=\frac{7}{2}\quad ,\quad 2m-1=0\ \Rightarrow\ m=\frac{1}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^6\theta\ d\theta = \frac{1}{2}\beta(n,m) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma(4)} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\pi}{6} = \frac{5\pi}{32}$$

$$\int_{\mathbf{0}}^{\infty} \boldsymbol{t^{-\frac{3}{2}}(1-e^{-t})dt}$$

نكامل بالتجزئة:

$$u = 1-e^{-t} \Rightarrow\quad du = e^{-t}dt \qquad ,\quad dv = t^{-\frac{3}{2}}dt\quad \Rightarrow v = -2t^{-\frac{1}{2}}$$

$$\int_0^{\infty} t^{-\frac{3}{2}}(1-e^{-t})dt = \left[-2(1-e^{-t})t^{-\frac{1}{2}}\right]_0^{\infty} + 2\int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt = 2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{\pi}$$