كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الاولى**

مكتبة A to Z للخدمات الجامعية

المادة : هندسة تحليلية

المحاضرة : الاولى/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Z مكتبة

القسم: الفيزياء	الدكتور:
السنة: الأولى	المحاضرة:
المادة: هندسة تحليلية	الأولى - نظري

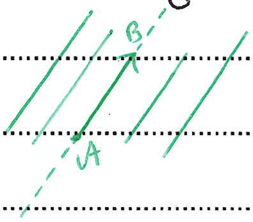
التاريخ: / /

A to Z Library for university services

* مفردات المقرر:

المتجهات في الفراغ _ المستقيم في الفراغ _ المستوي في الفراغ

_ تعريف المتجه:



المتجه $\vec{AB}$ هو قطعة مستقيمة موجهة من A إلى B ، عناصره:

1) البداية A والنهاية B

2) منحى المتجه: هي مجموعة جميع المستقيمات التي توازي المتجه

3) طويلة المتجه: $\vec{AB}$ نرمز لها بالرمز: AB أو $|\vec{AB}|$ أو $\|\vec{AB}\|$

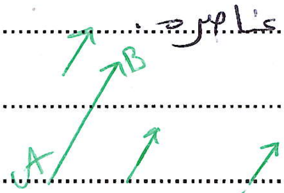
4) جهة المتجه: من A إلى B

يسمى المستقيم المار من النقطة A ويوازي AB بداية المتجه ومن نهايته B بحامل المتجه $\vec{AB}$

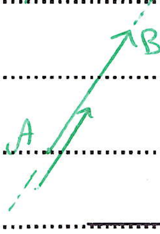
أنواع المتجهات: تقسم المتجهات إلى:

1) المتجه المقيد (المثبت): هو متجه تثبت جميع عناصره.

2) المتجه الطليق (الحر): هو متجه تثبت عناصره ما عدا بدايته (بدايته حرة)

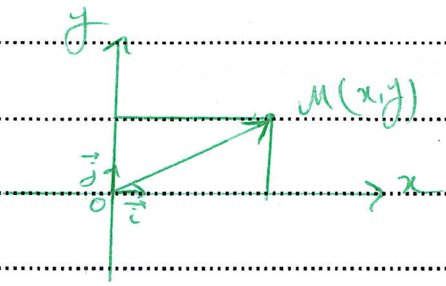


3) المتجه المنزلق: هو متجه تثبت عناصره ما عدا بدايته تنزلق على حامل المتجه



- الحل الاحداثية في المستوي xoy : ديكارتية، قطبية

1) الجملة الاحداثية الديكارتية :



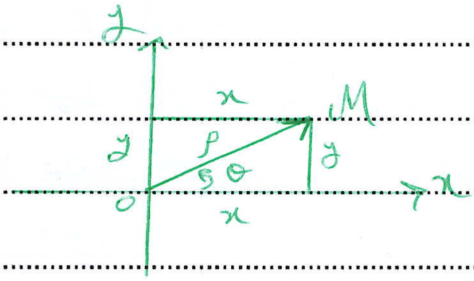
ليكن ox , oy محوران متعامدان
ومتجهي الواحدة هما $\vec{i}$, $\vec{j}$ على الترتيب
عندئذٍ كل نقطة M في المستوي
oxy تكتب العبارة المتجهية بالشكل : $\vec{OM} = \vec{ox} + \vec{oy}$

$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

يسمى الزوج (x,y) الاحداثيات الديكارتية

---

2) جملة الاحداثيات القطبية (ρ,θ) :



نفرض : $OM = \rho$

$\theta(\vec{ox},\vec{OM})$

حيث $0 < \theta \leq 2\pi$

يسمى الثنائية (ρ,θ) الاحداثيات القطبية للنقطة M

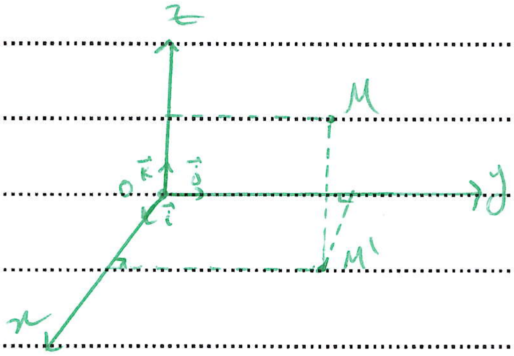
- علاقات الانتقال بين الاحداثيات القطبية والديكارتية :

$\Rightarrow x = \rho\cos\theta$	$\rho^2 = x^2 + y^2$
$\Rightarrow y = \rho\sin\theta$	$\cos\theta = \frac{x}{\rho}$
	$\sin\theta = \frac{y}{\rho}$
الانتقال من قطبي إلى ديكارتي	الانتقال من ديكارتي إلى قطبي

- الحل الاحداثية في الفراغ : ديكارتي، اسطواني، كروي

TEL:0931497960

١) جملة الاحداثيات الديكارتية:



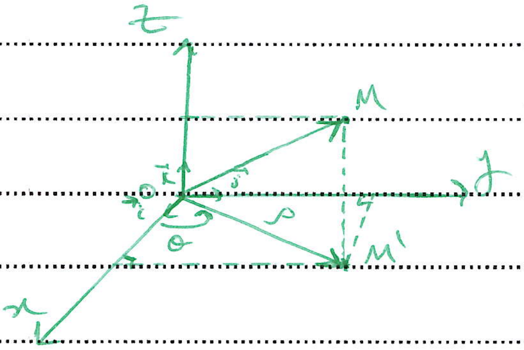
لتكن M نقطة في الفراغ $oxyz$
ولنفرض $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ متجهات الواحدة
على المحاور الاحداثية
ox, oy, oz على الترتيب:

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

تسمى الثلاثية (x, y, z) الاحداثيات الديكارتية للنقطة M في الفراغ
تسمى x فاصلة النقطة M
تسمى y ترتيب النقطة M
تسمى z راقم النقطة M

---

٢) جملة الاحداثيات الاسطوانية:



نفرض أن M' هو مسقط M على
المستوي oxy (اسقاط قائم موازٍ لـ oz)
نسمي طويلة OM' بـ ρ حيث $OM' = \rho$
والزاوية المتجهة: θ $(\vec{OM'}, \vec{ox})$
نسمي الثلاثية (ρ, θ, z) الاحداثيات الاسطوانية للنقطة M في الفراغ.
الانتقال من الاحداثيات الاسطوانية إلى الديكارتية وبالعكس:

(x, y, z) ⟵	⟶ (ρ, θ, z)
$z = z$	$z = z$
$\rho^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$	$x = \rho \cos\theta$
$\cos\theta = \frac{x}{\rho}$	$y = \rho \sin\theta$
$\sin\theta = \frac{y}{\rho}$	من اسطواني إلى ديكارتي
من ديكارتي إلى اسطواني	

مثال: أوجد الإحداثيات القطبية للنقطة M المعطاة بالشكل الديكارتي

$M(\sqrt{2}, \sqrt{2})$

الحل: الإحداثيات القطبية: (ρ, θ) , $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$

$\rho^2 = x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow \rho = 2$

$\cos\theta = \frac{x}{\rho} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\theta = \frac{y}{\rho} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow M(2, \frac{\pi}{4})$

مثال: أوجد الإحداثيات الاسطوانية للنقطة $M(2, 2\sqrt{3}, 3)$

الحل: $M(\rho, \theta, z)$, $x = 2$, $y = 2\sqrt{3}$, $z = 3$

$\rho^2 = x^2 + y^2 = 4 + 12 = 16 \Rightarrow \rho = 4$

$\cos\theta = \frac{x}{\rho} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\sin\theta = \frac{y}{\rho} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow M(4, \frac{\pi}{3}, 3)$

مثال: أوجد الإحداثيات الديكارتية للنقطة M المعطاة بالشكل الاسطواني

$M(2, \frac{\pi}{4}, 2\sqrt{3})$

الحل: $(\rho, \theta, z) \rightarrow (x, y, z)$

$\rho = 2$, $\theta = \frac{\pi}{4}$, $z = 2\sqrt{3}$

$x = \rho\cos\theta = \sqrt{2}$

$y = \rho\sin\theta = \sqrt{2}$

$z = 2\sqrt{3}$

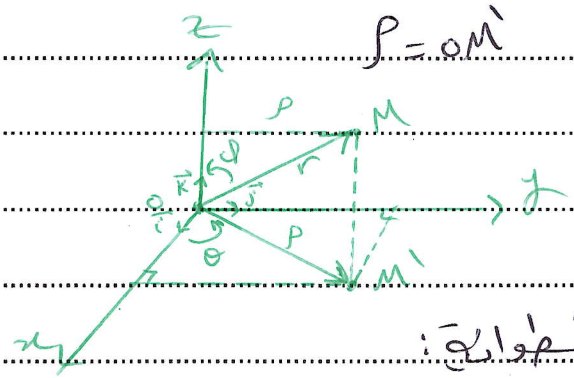
$\Rightarrow M(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\sqrt{3})$

---

3) جملة الإحداثيات الكروية:

نفرض $\theta(\vec{i}, \vec{OM'})$ حيث $0 \leq \theta \leq 2\pi$

و α $(\vec{k}, \vec{OM})$



$\rho = OM'$ ، $r = OM$

يسمى الثلاثية (r, α, θ)

الإحداثيات الكروية للنقطة M

حيث $r = \|\vec{OM}\|$

- العلاقة بين جملة الإحداثيات الكروية والاسطوانية:

$\rho = r \sin\alpha$

$\theta = \theta$

$z = r\cos\alpha$

الانتقال من كروي إلى اسطواني

$r^2 = \rho^2 + z^2 \Rightarrow r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$

$\cos\alpha = \dfrac{z}{r} = \dfrac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$

$\sin\alpha = \dfrac{\rho}{r} = \dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$

الانتقال من اسطواني إلى ديكارتي

- العلاقات بين جملة الإحداثيات الديكارتية والكروية:

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta &= \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{aligned}\right\} \theta$

$x = r\sin\alpha\cos\theta$

$y = r\sin\alpha\sin\theta$

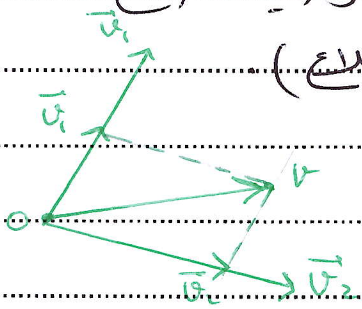
$z = r\cos\alpha$

$\cos\alpha = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $\Big\}\ \alpha$

- جمع المتجهات: لجمع متجهين $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$

1) نرسم من نقطة ما في الفضاء O متجهاً $\vec{OA_1}$ يساير $\vec{v_1}$ ثم متجهاً $\vec{OA_2}$ يساير $\vec{v_2}$ فيكون $\vec{OA}$ هو حاصل جمع المتجهين

$\vec{OA_1}$ ، $\vec{OA_2}$ وهو نهاية قطر متوازي الأضلاع المنشأ على $\vec{v_1}$ ، $\vec{v_2}$ (قاعدة متوازي الأضلاع).

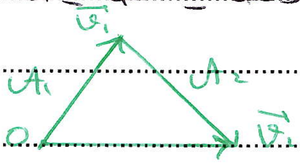


2) طريقة أخرى: ننشأ في الفراغ نقطة O نرسم منها متجهاً يساير $\vec{v_1}$ وليكن $\vec{OA_1}$ ثم نرسم من نهاية $\vec{v_1}$ $(\vec{OA_1})$ أي من A_1 شعاعاً يساير $\vec{v_2}$ وليكن $\vec{OA_2}$ فيكون المجموع هو:

$$\vec{OA_1}+\vec{A_1A_2}=\vec{OA_2}$$

(قاعدة شال) (نهاية الأول بداية الثاني)

وبالتالي المجموع هو شعاع بدايته بداية الأول ونهايته نهاية الثاني



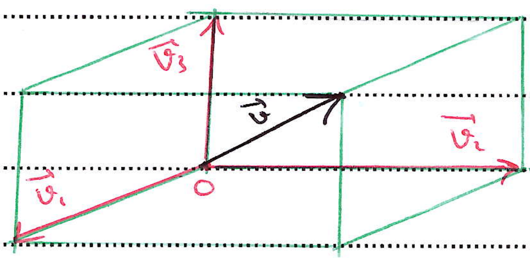
تعميم:

ليكن لدينا: $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}$ متجهات يراد جمعها

ننشأ من نقطة O متجهاً يساير $\vec{v_1}$ وليكن $\vec{OA_1}$ ثم ننشأ من A_1 مسايراً لـ $\vec{v_2}$ وليكن $\vec{A_1A_2}$ وهكذا ننشأ مسايراً لـ $\vec{v_n}$ وليكن $\vec{A_{n-1}A_n}$ عندئذ:

$$\vec{v_1}+\vec{v_2}+\vec{v_3}+\dots+\vec{v_n}=\vec{OA_1}+\vec{A_1A_2}+\vec{A_2A_3}+\dots+\vec{A_{n-1}A_n}=\vec{OA_n}$$

* حالة خاصة:



إن مجموع ثلاث أشعة غير واقعة في مستوٍ واحد:
هو شعاع بدايته بداية الأشعة ونهايته نهاية قطر متوازي
المستطيلات المنشأ عليها

طرح متجهين:

حاصل طرح متجه $\vec{v_1}$ من متجه آخر $\vec{v}$ هو متجه $\vec{v_2}$ بحيث إذا
أضيف إلى $\vec{v_1}$ كان الناتج $\vec{v}$

$$\vec{v} - \vec{v_1} = \vec{v_2}$$

$$\vec{v_1} + \vec{v_2} = \vec{v}$$

نتيجة:
$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

— انتهت المحاضرة —