كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : امثليات عددية

المحاضرة : الاولى /نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Z مكتبة

تعريف عام: تعد الأمثليات العددية من الموضوعات المهمة في علم الرياضيات حيث تفتح لنا أبواباً لفهم كيفية اتخاذ القرارات الفعالة وتحقيق أفضل النتائج في مختلف المجالات (كالإدارة الأعمال - العلوم الهندسية - الاقتصاد)

يمكن تعريف مسألة أمثليات عددية بأنه العلم الذي يدرس إمكانية إيجاد نقطة النهاية الدنيا (العليا) للدالة $f(x) \in \mathbb{R}$ حيث $x \in \mathbb{R}^n$

ونظراً لوجود علاقة بين النهاية الدنيا والعليا سيقتصر الدراسة على إيجاد النهاية الدنيا فقط لأنه إذا طلب منا إيجاد $\max f(x)$ فإن هذا يكافئ إيجاد $\min -f(x)$

- رياضياً تعرف المسألة: $\min f(x)$; $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

سنقسم دراستنا إلى مرحلتين: **المرحلة الأولى** سنهتم بإيجاد نقطة النهاية الدنيا الموضعية للدالة $f(x)$ بمتغير واحد $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

وفي **المرحلة الثانية** سنحل المسألة في الحالة العامة عندما تكون الدالة $f(x)$ تابعة لـ n متغير حقيقي.

- قبل البدء سنقدم بعض التعاريف والمصطلحات الأساسية التي نحتاجها لبناء طرائق عددية تقدم الحل الأمثل التقريبي للمسألة المطروحة.

تعريف (1): النهاية القصوى الموضعية:

1 - يقال إن الدالة f تملك قيمة نهاية دنيا موضعية عند $x = p$

إذا وُجِدَ مجال مفتوح I يتضمّن p بحيث يكون الشّرط $f(p) \leq f(x)$ $\forall x \in I$

2 - يُقال إنّ f تملك قيمة نهاية عُظمى (عليا) موضعية عند $x=p$ إذا وُجِدَ مجال مفتوح I بحيث يتضمن p ويحقّق $f(p) \geq f(x)$ $\forall x \in I$

تعريف (2): نقول إنّ الدالة f تملك نهاية دنيا موضعية في المجال $I =]a,b[$ إذا كان $f'(a) < 0 < f'(b)$

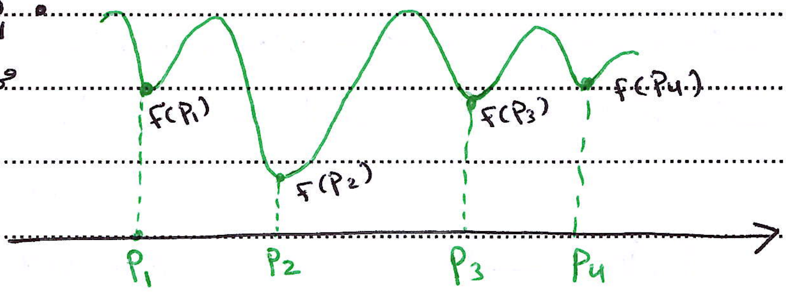
بمعنى آخر يوجد $p \in]a,b[$ بحيث $f(p) < f(a) , f(b)$

• p_1 و p_3 و p_4 نهايات دنيا محلية / موضعية

local minimum

• p_2 نهاية دنيا شاملة

global minimum



تعريف (3): التزايد والتناقص (الاطراد)

بفرض أنّ الدالة $f(x)$ معرفة على المجال I نميز حالتين:

1 - إذا كان $x_1 < x_2$ حيث $x_1 , x_2 \in I$ وكان $f(x_1) < f(x_2)$ يُقال إنّ f متزايدة على المجال I

2 - إذا كان $x_1 < x_2$ حيث $x_1 , x_2 \in I$ وكان $f(x_1) > f(x_2)$ يُقال إنّ f متناقصة على المجال I

مبرهنة الاطراد (1): بفرض أنّ الدالة $f(x)$ مستمرة على المجال $I = [a,b]$ وقابلة للاشتقاق على المجال $]a,b[$ نميز حالتين:

1 - إذا كان $f'(x) > 0$ حيث $\forall x \in]a,b[$ نقول إنّ f دالة

متزايدة على المجال I (أو على هذه الفترة $]a,b[$)

2 - إذا كانت $f'(x)<0$ حيث $\forall x \in]a,b[$ عندئذٍ نقول إنّ f دالة متناقصة على هذا المجال (على هذه الفترة)

مبرهنة (2): بفرض أنّ $f(x)$ دالة معرفة على المجال $[a,b]$ وتملك نهاية قصوى موضعية (دنيا أو عليا) $p\in]a,b[$ ، إذا كانت $f(x)$ قابلة للتفاضل عند $x=p$ فإنّ $f'(p)=0$ وتسمى p نقطة حرجة (ساكنة).

مبرهنة (3): اختبار المشتق الأول:

بفرض أنّ $f(x)$ مستمر على المجال $[a,b]$ ، f' معرفة على المجال $]a,b[$ (f قابلة للاشتقاق على $]a,b[$) نميز حالتين:

1 - إذا كان $f'(x)<0$ بحيث $\forall x \in]a,p[$

و $f'(x)>0$ بحيث $\forall x \in]p,b[$

عندئذٍ تكون $f(p)$ نهاية دنيا موضعية

2 - إذا كان $f'(x)>0$ بحيث $\forall x \in]a,p[$

و $f'(x)<0$ بحيث $\forall x \in]p,b[$

عندئذٍ تكون $f(p)$ نهاية عليا (عظمى) موضعية

مبرهنة (4): اختبار المشتق الثاني:

بفرض أنّ f دالة مستمرة على المجال $[a,b]$ و f' و f'' معرفتين على المجال $]a,b[$ و $p\in]a,b[$ حيث p نقطة ساكنة أي $(f'(p)=0)$ نميز 3 حالات:

الحالة (1): إذا كانت $f''(p)>0$ عندئذٍ $f(p)$ هي نهاية دُنيا موضعية للدالة f

الحالة (2): إذا كانت $f''(p)<0$ عندئذٍ $f(p)$ هي نهاية عليا موضعية

للدالة f

الحالة (3): إذا كانت $f''(p)=0$ فإن هذا الاختبار غير كافي (نحتاج إلى مشتق ثالث).

تعريف: الدالة وحيدة الطَّور:

لتكن الدالة $f(x)$ معرفة على المجال $[a,b]$ ويوجد نقطة $p\in]a,b[$ إذا كانت $f'(x)<0$ بحيث $\forall x\in]a,p[$

و $f'(x)>0$ بحيث $\forall x\in]p,b[$

عندئذٍ نقول إنّ $f(x)$ دالة وحيدة الطور في المجال $[a,b]$

بمعنى آخر: إذا كانت الدالة $f(x)$ متناقصة على المجال $]a,p[$ ومتزايدة على المجال $]p,b[$ عندئذٍ $f(x)$ وحيدة الطور في المجال $[a,b]$.

- يقدّم لنا التحليل العددي بعض الطرائق مثل طريقة تنصيف المجال - المواطع - نيوتن رافسون حيث تستطيع هذه الطرائق إيجاد النقطة الساكنة للدالة $f(x)$ بمعنى آخر إيجاد جذر المعادلة $f'(x)=0$ (*)

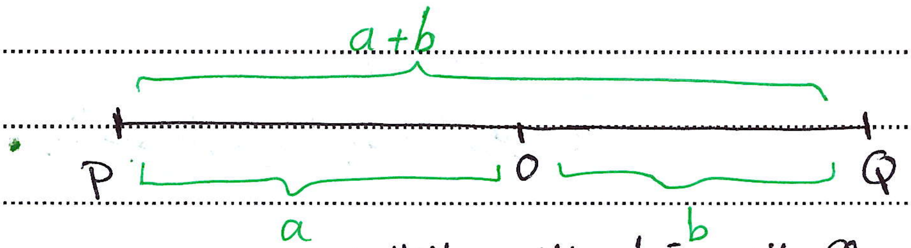
وإذا كانت الدالة $f(x)$ وحيدة الطور في المجال $[a,b]$ وكانت p نقطة تمثل جذر معزول للمعادلة (*) في المجال $[a,b]$ فإنّ p نقطة نهاية دنيا موضعية للمسألة $\text{Min}\ f(x)$.

- **طريقة البحث الذهبي Golden Search:**

هي طريقة عددية هامة تستخدم لحل مسألة $\text{Min}\ f(x)$ بشرط أن تكون الدالة $f(x)$ وحيدة الطور في المجال $[a,b]$.

تعتمد الطريقة على إيجاد قيم الدالة بشكل تكراري في نقطتين داخليتين من مجال ما (يتم تحديد النقطتين الداخليتين بالاعتماد على النسبة الذهبية والرقم الذهبي) وعلى متتالية من المقارنات للدالة تُدعى الطريقة بهذا الاسم نسبةً إلى النسبة الذهبية (الرقم الذهبي).

النسبة الذهبيّة:



لنأخذ النقاط p و O و Q التي تعطي النسب التالية:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \phi \Longrightarrow \frac{a}{a} + \frac{b}{a} = \frac{a}{b} \Longrightarrow 1 + \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$$

$$\Longrightarrow 1 + \frac{1}{\phi} = \phi \Longrightarrow \phi + 1 = \phi^2$$

$$\Longrightarrow \phi^2 - \phi - 1 = 0$$

نحلّها باستخدام Δ فنجد أنّ $\Delta = 5 \Longleftarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{5}$

$\phi_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ مقبول $\qquad \phi_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ مرفوض

وبالتالي $r = \phi_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ حيث $r \simeq 1.618$ وهو الرقم الذهبي

ملاحظة: يمكن الحصول على الرقم الذهبي من نهاية حدين متتاليين في متتالية فيبوناتشي $\dfrac{f_{i+1}}{f_i} \underset{i \to \infty}{\simeq} r$

تذكير: متتالية فيبوناتشي: $f_0 = 1$ و $f_1 = 1$ و $f_{i+1} = f_i + f_{i-1}$

• في القطعة المستقيمة

سنبحث عن النقطتين الداخليتين c و d:

لدينا (طول)

$$\frac{L(ac)}{L(ad)} = \frac{L(ad)}{L(ab)} = r$$

• $\dfrac{L(ad)}{L(ab)} = r \Longrightarrow L(ad) = rL(ab) \Longrightarrow d - a = r(b-a)$

$$\boxed{d = a + r(b-a)}$$

• $\dfrac{L(ac)}{L(ad)} = r \Longrightarrow L(ac) = r\,L(ad) \Longrightarrow c - a = r(d-a)$

$\Rightarrow c-a = r^2(b-a) \Rightarrow \boxed{c = a + r^2(b-a)}$

▪ برنامج طريقة البحث الذهبي :

```
Clear [f, x]
f[x_] := x^2 - 2^x ; a=0 ; b=1.0 ;
r = (Sqrt [5] - 1) / 2 ;
For[ i=1 , i<=6 , c = a + r^2 (b-a) ;
d = a + r (b-a) ;
IF [ F[c] < F[d] ; b=d , a=c ; print["c=",
c , "d=" , d , "fc=" , F[c] , "fd=", F[d]] ;
i++ ]]
IF [ F[c] < F[d] , p=c , p=d ] ;
print[p , f(p) ] ;
```

شرح آلية عمل الخوارزمية :

▪ يكون لدينا مجال $[a,b]$ معلوم ودالة $f(x)$ معلومة.

الخطوة (1) : ▪ نجلب c, d (من القوانين) وبعدها نقوم بحساب $f(c)$ و $f(d)$ بالاعتماد على الدالة المعلومة

▪ نقارن بين قيمتي $f(c)$ و $f(d)$ ونميز حالتين

1) $f(c) < f(d)$ في هذه الحال نضع $b = d$ ويكون المجال الجديد $[a, d]$

2) $f(c) > f(d)$ في هذه الحال نضع $a = c$ ويكون المجال الجديد $[c, b]$

الخطوة (2) : نحول المجال الجديد (نرمزه) بـ $[a, b]$

ونعاود بالبحث في المجال الجديد عن c و d مجدداً من القوانين ونعاود المقارنة حتى الوصول إلى شرط التوقف

الحل : إذا كان $f(c) < f(d) \Leftarrow$ الحل هو $p = c$ وإلا الحل هو $p = d$.

مثال : استخدم طريقة البحث الذهبي لحل المسألة $Min\ f(x)$ حيث
$f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ في المجال $[0,1]$
مع شرط توقف $d - c < esp = 0.06$
(وظيفة)

انتهت المحاضرة