كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : نظرية المعادلات

المحاضرة : الاولى /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

* بعض المفاهيم من التحليل التابعي :

• فضاء شعاعي : نقول عن مجموعة V أنها فضاء خطي إذا عرفنا عليها عمليتين العملية الأولى (+) تبديلية و تجميعية و يوجد عنصر حيادي و لكل عنصر نظير ، العملية الثانية (·) تجميعية - يقبل عنصر حيادي - توزيعي على الجمع

• الفضاء المنتظم : نقول عن الفضاء الخطي B أنه فضاء منتظم إذا قابلنا كل عنصر a فيه بعدد حقيقي موجب $\|a\|$ -عقق الشرط :

① $\|a\| \geq 0$; $\|a\| = 0 \Rightarrow a = 0$

② $\|\lambda a\| = |\lambda| \, \|a\|$

③ $\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$

• الفضاء التام : هو فضاء خطي منتظم كل متتالية أساسية تكون متقاربة من نقطة منه .

• فضاء باناخ : فضاء خطي منتظم تام .

• المؤثر : ليكن E و F فضائين منتظمين و لتكن D مجموعة جزئية من E ، $T : D \longrightarrow F$ مؤثر ، إذا كان $F = IR$ أو $F = \mathbb{C}$ نسمي D مؤثر دالي

- نقول عن T أنه مؤثر خطي إذا كان D فضاء خطي جزئي من E وكان $T(\lambda x + \mu y) = \lambda Tx + \mu Ty$ حيث $\lambda , \mu \in IR$ أو $\mathbb{C}$

• الاستمرارية : نقول عن المؤثر T أنه مستمر في X_0 إذا كان

$\forall \varepsilon>0 \;\exists \delta>0 \quad |x-x_0|<\delta \quad \|T_x-T_{x_0}\|<\varepsilon$
$\forall x\in D$

نقول عن المؤثر T أنه يحقق شرط ليبشيز إذا وجد ثابت K
يحقق $x,y\in D$; $\|T_x-T_y\|_F \le K.\|x-y\|_E$
K ثابت ليبشيز

ملاحظة: المؤثر الذي يحقق شرط ليبشيز هو مؤثر مستمر

★ تذكرة بالمعادلات التفاضلية :

تعريف : معادلة تفاضلية عادية ODE :
من المرتبة n : هي علاقة من الشكل :

(1) $F(t, x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0 \quad ; \quad t\in I \subseteq \mathbb{R}$

أما الشكل النظامي للمعادلة التفاضلية هو :

(2) $x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$

ملاحظة : ليس من الممكن دائماً كتابة المعادلة التفاضلية بالشكل النظامي (محلولة بالنسبة لأعلى مشتق)

- سوف نعتمد فيما يأتي لاحقاً من أجل تبسيط الدراسة الشكل النظامي لمعادلة تفاضلية من المرتبة الأولى (3) $x' = f(t, x)$

- إذا كان لدينا معادلة تفاضلية من المرتبة n مكتوبة بالشكل النظامي :
$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$ فإنه يمكن تحويلها إلى جملة من

n معادلة كل منها من المرتبة الأولى فنضع:

$x = y_1 \quad , \quad x' = y_2 \quad , \ldots , \quad x^{(n-1)} = y_n$

$X = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

نضع
$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = y_4 \\ \vdots \\ y_n' = f(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases}$$

$y' = F(t, y)$

$$; F(t,y) = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ f(t, y_1, \ldots, y_n) \end{pmatrix}$$

كل المفاهيم التي سنبحثها لاحقاً ستكون من أجل معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى وذلك بفضل ملاحظة سابقة.

تعريف: مسألة القيم الابتدائية IVP للمعادلة (3) $x' = f(t, x)$ تعطى بالشكل:

$$(4) \ldots \begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x \quad ; \ t \in I \subseteq IR \end{cases}$$

حيث $x \in IR^n$ و f تابع حقيقي معرف ومستمر على منطقة $D \subset IR \times IR^n$ ويأخذ قيمه في IR^n

• مسألة القيم الابتدائية لمعادلة تفاضلية من المرتبة n:

$x^{(n)} = f(t, x, \ldots, x^{(n-1)})$

$x(t_0) = m_1 \quad , \quad x(t_0) = m_2 \quad , \ldots , \quad x^{(n-1)}(t_0) = m_n$

$y' = F(t, y)$

$$y(t_0) = y_0 = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}$$

تعريف : حل مسألة القيم الابتدائية (4) :

نقول عن التابع $\phi(t) \in C^1(I)$ أنه حل للمسألة (4) إذا حقق

$\phi'(t) = f(t, \phi(t))$ من أجل كل $t \in I \subset \mathbb{R}$ ويكون ..... (5)

$(t, \phi(t)) \in U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ مع الشرط $\phi(t_0) = x_0$

تعريف : الشكل التكاملي للحل

$$(6) \ldots \quad \phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))\, ds$$

الشكل التكاملي لحل مسألة القيم الابتدائية (4)

تكافؤ بين المسألتين (5) و (6)

نظرية : نفرض f تابع مستمر على منطقة $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ولتكن

$(t_0, x_0) \in U$ و ϕ تابع معرف على مجال $I \subset \mathbb{R}$ بحيث $t_0 \in I$

وعندها يكون ϕ حل لمسألة القيم الابتدائية (4) إذا وفقط إذا :

① $\forall t \in I \; ; \; (t, \phi(t)) \in U$

② ϕ تابع معرف ومستمر على I

③ $\forall t \in I \quad , \quad \phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))\, ds$

البرهان :

$\Longleftarrow$ ϕ حل بالتالي $\phi' = f(t, \phi(t))$ من أجل كل t من I

$\phi(t_0) = x_0$

عندها من أجل $t \in I$ بالتالي $(t, \phi(t)) \in U$

بالمكاملة من t_0, t نجد : $\phi(t) - \phi(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))\, ds$

$$\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))\, ds$$

⟸ بفرض أن ① و ② و ③ محققة نشتق ③ نجد :

$$\phi'(t_0) = f(t, \phi(t))$$

بتعويض $t = t_0$ في الشرط ③ نجد أن $\phi(t_0) = x_0$ بالتالي $\phi(t)$ هو حل للمسألة (4)

* نظرية الوجود و الوحدانية :

بفرض لدينا مسألة القيم الابتدائية $\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ حيث f تابع معرف

ومستمر على منطقة $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ بحيث $t_0, x_0 \in R$

و f يحقق شرط ليبشيز في x أي

$\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \le L \|x_1 - x_2\|$ في $\mathbb{R}^n$

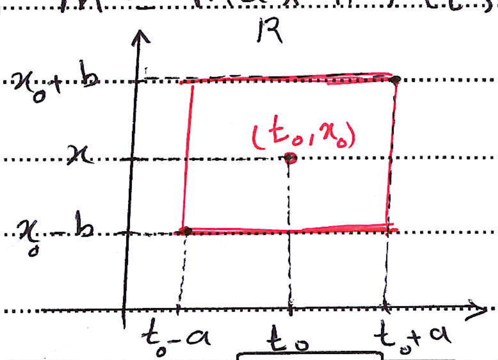
من أجل جميع النقاط (t,x_1) و $(t,x_2) \in R$ حيث :

$R = \{(t,x) ; \|x - x_0\| \le b , |t - t_0| \le a\}$ عندئذ

يوجد $0 < \delta$ بحيث $0 < \delta \le \alpha = \min(a, \frac{b}{M})$

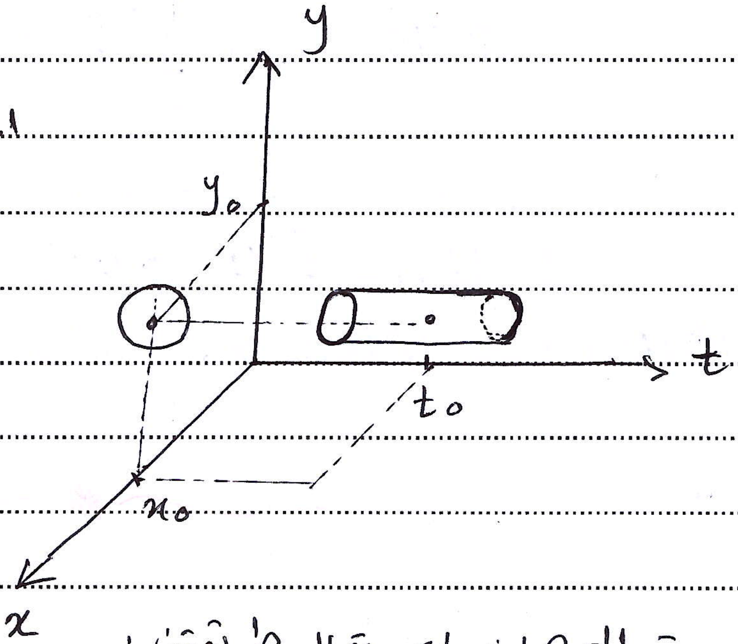
بحيث يكون لمسألة القيم الابتدائية المفروضة $|t - t_0| \le \delta$

$; \ m = \max \|f(t,x)\|$



المنطقة R حيث $\mathbb{R} \supset D$

المنطقة R في D ⊂ $\mathbb{R}^2$



سيتم البرهان باستعمال طريقتين :

الطريقة الأولى : طريقة بيكارد (طريقة التقريبات المتتالية)

الطريقة الثانية : طريقة النقطة الثابتة

The End
Safaa