تمارين (1)

1. لتكن الأسرة $\tau = \{T \in P(\mathbb{N}): \{1,2,5\} \subseteq T\} \cup \{\emptyset\}$ معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ، أثبت أن τ تعرف تبولوجيا على $\mathbb{N}$، ثم أوجد $V(5)$ و $V(7)$.
2. لتكن $X \neq \emptyset$ مجموعة كيفية من العناصر و لنعرف عليها الأسرة الآتية:
$\tau_{cof} = \{T \in P(X): X \setminus T$ مجموعة منتهية$\} \cup \{\emptyset\}$ أثبت أن الأسرة τ_{cof} تعرف تبولوجيا على X ، وأوجد أسرة المجموعات المغلقة في هذا الفضاء.
3. لتكن $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية و A مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ ، لنعرف على $\mathbb{R}$ الأسرة الآتية: $\tau = \{T \in P(\mathbb{R}): A \subseteq T\} \cup \{\emptyset\}$ والمطلوب:
   a. عين المجموعة A لتكون τ التبولوجيا القوية على $\mathbb{R}$.
   b. عين المجموعة A لتكون τ التبولوجيا الضعيفة على $\mathbb{R}$.
4. لنعرف على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ التبولوجيا :
$$\tau = \{T_n = \{n, n+1, n+2, \dots.\}: n = 1,2,3, \dots.\} \cup \{\emptyset\}$$
و لنأخذ المجموعات: $A = \{1,2, \dots.., n\}$ و $B = \{1,3,5, \dots \dots\}$
أوجد $A^{\circ}, ex(A), B^{\circ}, ex(B)$
5. لتكن $X = \{1,2,3,4\}$ و لنعرف عليها التبولوجيا
$\tau = \{X, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$ و المطلوب:
   a. عرف تبولوجيا τ_1 على X بحيث $\{1,3,4\} \notin \mathcal{F}_1$ و $\tau_1 \subseteq \tau$.
   b. عرف تبولوجيا τ_2 على X بحيث $\{2,3\} \in \mathcal{F}_2$ و $\{3,4\} \in \tau_2$ و $\tau_1 \subseteq \tau_2$.
6. لتكن $\tau_1, \tau_2, \dots., \tau_n$ تبولوجيات معرفة على مجموعة $X \neq \emptyset$، تحقق من كون $\cap_{i=1}^{n} \tau_i$ تعرف تبولوجيا على X، ناقش المسألة في حالة الاجتماع.