كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : تبولوجيا عامة2

المحاضرة : الاولى /عملي/

{{ A to Z مكتبة }}

تمارين (1)

1. لتكن الأسرة $\tau = \{T \in P(\mathbb{N}) : \{1,2,5\} \subseteq T\} \cup \{\emptyset\}$ معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ، أثبت أن τ تعرف تبولوجيا على $\mathbb{N}$، ثم أوجد $V(5)$ و $V(7)$.
2. لتكن $X \neq \emptyset$ مجموعة كيفية من العناصر و لنعرف عليها الأسرة الآتية:
$\tau_{cof} = \left\{T \in P(X) : X \setminus T \text{ مجموعة منتهية}\right\} \cup \{\emptyset\}$ أثبت أن الأسرة τ_{cof} تعرف تبولوجيا على X ، وأوجد أسرة المجموعات المغلقة في هذا الفضاء.
3. لتكن $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية و A مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ ، لنعرف على $\mathbb{R}$ الأسرة الآتية: $\tau = \left\{T \in P(\mathbb{R}) : A \subseteq T\right\} \cup \{\emptyset\}$ والمطلوب:
   a. عين المجموعة A لتكون τ التبولوجيا القوية على $\mathbb{R}$.
   b. عين المجموعة A لتكون τ التبولوجيا الضعيفة على $\mathbb{R}$.
4. لنعرف على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ التبولوجيا :
$$\tau = \{T_n = \{n, n+1, n+2, \dots\} : n = 1,2,3,\dots\} \cup \{\emptyset\}$$
و لنأخذ المجموعات: $A = \{1,2,\dots,n\}$ و $B = \{1,3,5,\dots\}$
أوجد $A^\circ, ex(A), B^\circ, ex(B)$
5. لتكن $X = \{1,2,3,4\}$ و لنعرف عليها التبولوجيا
$\tau = \{X, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$ و المطلوب:
   a. عرف تبولوجيا τ_1 على X بحيث $\{1,3,4\} \notin \mathcal{F}_1$ و $\tau_1 \subseteq \tau$.
   b. عرف تبولوجيا τ_2 على X بحيث $\{2,3\} \in \mathcal{F}_2$ و $\{3,4\} \in \tau_2$ و $\tau_1 \subseteq \tau_2$.
6. لتكن $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ تبولوجيات معرفة على مجموعة $X \neq \emptyset$، تحقق من كون $\cap_{i=1}^{n} \tau_i$ تعرف تبولوجيا على X، ناقش المسألة في حالة الاجتماع.

تمارين (1)

1. لتكن الأسرة $\tau = \{T \in P(\mathbb{N}) : \{1,2,5\} \subseteq T\} \cup \{\emptyset\}$ معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ، أثبت أن τ تعرف تبولوجيا على $\mathbb{N}$، ثم أوجد $V(5)$ و $V(7)$.

الحل:

1. لدينا من تعريف الأسرة τ أن $\emptyset \in \tau$ و بما أن $\{1,2,5\} \subseteq \mathbb{N}$ فإن $\mathbb{N} \in \tau$
2. لنأخذ الأسرة الكيفية $\{T_i, T_i \in \tau, i \in I\}$ هذا يعني أن:

$$\underline{T_i \in \mathrm{P}(\mathbb{N})\ \&\ \{1,2,5\} \subseteq \mathbb{N}, \forall \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I}}$$

و منه إن $\{1,2,5\} \subseteq \bigcup_{i \in I} T_i\ \&\ \bigcup_{i \in I} T_i \in P(\mathbb{N})$

و هذا يعني أن $\bigcup_{i \in I} T_i \in \tau$

3. أياً كان $T, G \in \tau$ فإن:

$$T, G \in P(\mathbb{N})\ \&\ \{1,2,5\} \subseteq T\ \&\ \{1,2,5\} \subseteq G$$

بالتالي: $\{1,2,5\} \subseteq T \cap G\ \&\ T \cap G \in P(\mathbb{N})$

و هذا يعني أن $T \cap G \in \tau$

من تحقق الشروط الثلاث نجد أن τ تعرف تبولوجيا على $\mathbb{N}$

$V(5)$:

$$V \in V(5) \iff \exists T \in \tau : 5 \in T \subseteq V$$

لكن $5 \in T$ لأن $\{1,2,5\} \subseteq T$ أياً كانت $\mathrm{T} \in \tau$

$$V(5) = \{V \in P(\mathbb{N}) : \{1,2,5\} \subseteq V\}$$

$V(7)$:

$V \in V(7) \iff \exists T \in \tau : 7 \in T \subseteq V$ و بما أن $\{1,2,5\} \subseteq T$ أياً كانت $\mathrm{T} \in \tau$

أصبح لدينا $\{1,2,5,7\} \subseteq T$ و منه $V(7) = \{V \in P(\mathbb{N}) : \{1,2,5,7\} \subseteq V\}$

2. لتكن $X \neq \emptyset$ مجموعة كيفية من العناصر و لنعرف عليها الأسرة الآتية:

$\tau_{cof} = \{T \in P(X) : \text{مجموعة منتهية}\ X \setminus T\} \cup \{\emptyset\}$ أثبت أن الأسرة τ_{cof} تعرف تبولوجيا على X ، وأوجد أسرة المجموعات المغلقة في هذا الفضاء.

الحل:

*

$X\backslash X=\emptyset$ و المجموعة $\emptyset$ مجموعة منتهية بالتالي المجموعة X تحقق تعريف الأسرة τ_{cof} فهي أحد عناصرها أي أن $X\in\tau_{cof}$ و لدينا $\emptyset\in\tau_{cof}$ بحسب تعريف الأسرة τ_{cof} و الشرط الأول من تعريف التبولوجيا محقق .

* أياً كانت المجموعتان $T,G\in\tau_{cof}$ فإن كل من المجموعتين $X\backslash T\ ,X\backslash G$ هي مجموعة منتهية و ذلك بحسب تعريف الأسرة τ_{cof} و بما أن اجتماع أي مجموعتين منتهيتين هو مجموعة منتهية فإن المجموعة:

$(X\backslash T)\cup(X\backslash G)$ هي مجموعة منتهية و بحسب قانون دومرغان لدينا :

$(X\backslash T)\cup(X\backslash G)=X\backslash(T\cap G)$ و هذا يعني أن المجموعة $T\cap G$ تحقق تعريف الأسرة τ_{cof} فهي أحد عناصرها أي أن $T\cap G\in\tau_{cof}$ و الشرط الثاني من تعريف التبولوجيا محقق.

* لنأخذ أسرة كيفية من τ_{cof} مثل: $\mu=\{T_i,T_i\in\tau_{cof}\ ,i\in I\}$ بحسب تعريف الأسرة τ_{cof} فإن:

$X\backslash T_i,\forall\ i\in I$ مجموعة منتهية و بما أن أي تقاطع لمجموعات منتهية هو مجموعة منتهية فإن المجموعة $\cap_{i\in I}(X\backslash T_i)$ مجموعة منتهية و لكن حسب دومرغان فإن $\cap_{i\in I}(X\backslash T_i)=$ $X\backslash\cup_{i\in I}T_i$ و هذا يعني أن المجموعة $\cup_{i\in I}T_i$ تحقق تعريف الأسرة τ_{cof} فهي أحد عناصرها أي أن $\cup_{i\in I}T_i\in\tau_{cof}$ و الشرط الثالث من تعريف التبولوجيا محقق.

نستنتج مما سبق أن الأسرة τ_{cof} تعرف تبولوجيا على المجموعة X ندعوها تبولوجيا المتممات المنتهية على X

أسرة المجموعات المغلقة في هذا الفضاء

$$\mathcal{F}_{cof}=\left\{F\in P(X):\text{مجموعة منتهية } F\right\}\cup\{X\}$$

3. لتكن $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية و A مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ ، لنعرف على $\mathbb{R}$ الأسرة الآتية:

$\tau=\{T\in P(\mathbb{R}):A\subseteq T\}\cup\{\emptyset\}$ و المطلوب:

a. عين المجموعة A لتكون τ التبولوجيا القوية على $\mathbb{R}$.

b. عين المجموعة A لتكون τ التبولوجيا الضعيفة على $\mathbb{R}$.

a. عين المجموعة A لتكون τ التبولوجيا القوية على $\mathbb{R}$.

حتى تكون التبولوجيا τ هي التبولوجيا القوية على $\mathbb{R}$ يجب أن تكون أي مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ عبارة عن مجموعة مفتوحة و بالتالي كل مجموعة وحيدة العنصر يجب أن تكون مفتوحة و

المجموعة المحتواة في أي مجموعة وحيدة العنصر هي الخالية أي بوضع $A=\emptyset$ تصبح τ هي التبولوجيا القوية على $\mathbb{R}$.

b. عين المجموعة A لتكون τ التبولوجيا الضعيفة على $\mathbb{R}$.

حتى تكون التبولوجيا τ هي التبولوجيا الضعيفة على $\mathbb{R}$ يجب أن تضم عنصرين فقط هما المجموعة الخالية و المجموعة $\mathbb{R}$ و نلاحظ أنه بوضع $A=\mathbb{R}$ يتم المطلوب

4. لنعرف على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ التبولوجيا :

$$τ=\{T_n=\{n,n+1,n+2,\dots\}: n=1,2,3,\dots\}\cup\{\emptyset\}$$

و لنأخذ المجموعات: $A=\{1,2,\dots,n\}$ و $B=\{1,3,5,\dots\}$

أوجد $A^\circ, ex(A), B^\circ, ex(B)$

الحل:

من تعريف الأسرة τ نلاحظ أن أي مجموعة مفتوحة غير خالية هي مجموعة غير منتهية و المجموعة A منتهية بالتالي فالمجموعة المفتوحة الوحيدة المحتواة في A هي المجموعة الخالية $\emptyset$ و هذا يعني أن $A^\circ=\emptyset$.

$ex(A)=(\mathbb{N}\backslash A)^\circ$ نلاحظ أن $\mathbb{N}\backslash A=\{n+1,n+2,\dots\}=T_{n+1}\in\tau$

و منه $ex(A)=(\mathbb{N}\backslash A)^\circ=\mathbb{N}\backslash A$

بالنسبة للمجموعة B فإننا نلاحظ أنه بالرغم من كونها غير منتهية إلا أنها لا تحوي جميع الأعداد الطبيعية التالية لعدد طبيعي مثبت أي أنها لا تحوي أي مجموعة من النمط $T_n\ ,\forall n\in\mathbb{N}$ و بالتالي فالمجموعة المفتوحة الوحيدة المحتواة في B هي المجموعة الخالية $\emptyset$ و هذا يعني أن $B^\circ=\emptyset$.

$ex(B)=(\mathbb{N}\backslash B)^\circ$ لكن $\mathbb{N}\backslash B=\{2,4,6,\dots\}$ عندئذٍ بمناقشة مماثلة نجد أن $ex(B)=(\mathbb{N}\backslash B)^\circ=\emptyset$.

5. لتكن $X=\{1,2,3,4\}$ و لنعرف عليها التبولوجيا

$τ=\{X,\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,2,3\}\}$ و المطلوب:

a.عرف تبولوجيا τ_1 على X بحيث $\{1,3,4\}\notin\mathcal{F}_1$ و $\tau_1\subseteq\tau$.

بما أن $\{1,3,4\}\notin\mathcal{F}_1$ فإن $\{2\}\notin\tau_1$

$\tau_1=\{X,\emptyset,\{1,2\}\}$ تعرف تبولوجيا على X و تحقق $\tau_1\subseteq\tau$

b. عرف تبولوجيا τ_2 على X بحيث $\{2,3\}\in\mathcal{F}_2$ و $\{3,4\}\in\tau_2$ و $\tau_1\subseteq\tau_2$.

بما أن $\{2,3\}\in\mathcal{F}_2$ فإن $\{1,4\}\in\tau_2$

$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{3,4\}, \{1,4\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1\}, \{1,2,4\}\}$ تعرف تبولوجيا على X و تحقق $\tau_1 \subseteq \tau_2$

6. لتكن $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ تبولوجيات معرفة على مجموعة $X \neq \emptyset$، تحقق من كون $\cap_{i=1}^{n} \tau_i$ تعرف تبولوجيا على X، ناقش المسألة في حالة الاجتماع.

بما أن $X, \emptyset \in \tau_i, \forall i \in \{1,2, \dots, n\}$ فإن $X, \emptyset \in \cap_{i=1}^{n} \tau_i$ و الشرط الأول من تعريف التبولوجيا محقق.

لتكن $\{T_j, j \in J\}$ أسرة كيفية من عناصر $\tau = \cap_{i=1}^{n} \tau_i$ هذا يعني أن

$T_j \in \tau_i, \forall i \in \{1,2, \dots, n\} \& \forall j \in J$ و بحسب كون τ_i تبولوجيا على X و ذلك $\forall i \in \{1,2, \dots, n\}$

فإن $\cup_{j\in J} T_j \in \tau_i, \forall i = \overline{1,n}$ و هذا يؤدي بالضرورة إلى كون $\cup_{j\in J} T_j \in \cap_{i=1}^{n} \tau_i$ أي $\cup_{j\in J} T_j \in \tau$

و الشرط الثاني من تعريف التبولوجيا محقق.

الآن لنأخذ عنصرين كيفيين من عناصر $\tau = \cap_{i=1}^{n} \tau_i$ مثل T, G بالتالي $T, G \in \tau_i, \forall i \in \{1,2, \dots, n\}$

و بحسب كون τ_i تبولوجيا على X و ذلك $\forall i \in \{1,2, \dots, n\}$ فإن $T \cap G \in \tau_i, \forall i = \overline{1,n}$

و هذا يؤدي بالضرورة إلى كون $T \cap G \in \cap_{i=1}^{n} \tau_i$ أي $T \cap G \in \tau$ و الشرط الثالث من تعريف التبولوجيا محقق.

نستنتج مما سبق أن $\tau = \cap_{i=1}^{n} \tau_i$ تعرف تبولوجيا على X

أما في حالة الاجتماع فالقضية غير صحيحة بالضرورة أي أن اجتماع تبولوجيتين معرفتين على المجموعة X ليس بالضرورة تبولوجيا معرفة عليها.

مثال: $X = \{a, b, c\}$ و لنعرف عليها التبولوجيتين

$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{a\}\}, \tau_2 = \{X, \emptyset, \{b\}\}$ نلاحظ أن الأسرة:

$\tau_1 \cup \tau_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}\}$ لا تعرف تبولوجيا على المجموعة X لأن

$\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \notin \tau_1 \cup \tau_2$