



كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الرابعة

المادة : تبولوجيا 2

المحاضرة : الاولى /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

مكتبة A to Z Facebook Group :

كلية العلوم ،

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960



## مفاهيم أساسية في التولوجيا

الفضاء المترى:

لتكن  $X \neq \emptyset$  مجموعة كيفية من العناصر، و لنعرف  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$  تابع حقيقي يحقق الشروط الآتية:

1.  $x = y \Leftrightarrow d(x, y) = 0$
2.  $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$
3.  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in X$

عندئذ يسمى  $d$  تابع مسافة على  $X$  و نسمي الثنائية  $(X, d)$  فضاءً مترياً.

الكرات في الفضاء المترى:

ليكن  $(X, d)$  فضاءً مترياً، و لنأخذ  $a \in X$  نقطة كيفية، و  $\rho > 0$  عدداً حقيقياً كيفيةً:

نسمي المجموعة الجزئية  $B(a, \rho)$  من الفضاء  $X$  و المعرفة بالمساواة:

$$B(a, \rho) = \{x \in X: d(x, a) < \rho\}$$

كرة مفتوحة مركزها  $a$  و نصف قطرها  $\rho$ .

نسمي المجموعة الجزئية  $\bar{B}(a, \rho)$  من الفضاء  $X$  و المعرفة بالمساواة:

$$\bar{B}(a, \rho) = \{x \in X: d(x, a) \leq \rho\}$$

كرة مغلقة مركزها  $a$  و نصف قطرها  $\rho$ .

نسمي المجموعة الجزئية  $S(a, \rho)$  من الفضاء  $X$  و المعرفة بالمساواة:

$$S(a, \rho) = \{x \in X: d(x, a) = \rho\}$$

سطح كرة مركزها  $a$  و نصف قطرها  $\rho$ .

مثال: لتكن  $\mathbb{R}$  مجموعة الأعداد الحقيقية و لنعرف عليها التابع  $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  على

الشكل الآتي:  $d(x, y) = |x - y|$ ، عندئذ إن  $d$  يعرف تابع مسافة على  $\mathbb{R}$  و بالتالي

الفضاء  $(\mathbb{R}, d)$  فضاء مترى ندعوه الفضاء الحقيقي العادي و نرمز له  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ .

في هذا الفضاء تكون الكرات المفتوحة التي مركزها  $a$  و نصف قطرها  $\rho$ :

$$B(a, \rho) = \{x \in X: d(x, a) < \rho\} = \{x \in X: |x - y| < \rho\} = ]a - \rho, a + \rho[$$

و الكرات المغلقة فيه مركزها  $a$  و نصف قطرها  $\rho$ :

$$\bar{B}(a, \rho) = \{x \in X: d(x, a) \leq \rho\} = \{x \in X: |x - y| \leq \rho\} = [a - \rho, a + \rho]$$

و سطح الكرات مركزها  $a$  و نصف قطرها  $\rho$  هي فقط النقطتان  $\{a - \rho, a + \rho\}$ .

ملاحظة: في الفضاء  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  كل مجال مفتوح و غير محدود هو مجموعة مفتوحة فيه.

**تعريف: المجموعة المفتوحة في الفضاء المترى**

إذا كان  $(X, d)$  فضاءً مترياً كيفياً، و  $A$  مجموعة جزئية من نقاطه، يقال إن المجموعة  $A$  مفتوحة في الفضاء المترى  $(X, d)$  إذا و فقط إذا كانت كل نقطة من المجموعة  $A$  (إن وجدت) مركزاً لكرة مفتوحة محتواة في المجموعة  $A$ .

**مبرهنة:**

كل كرة مفتوحة في أي فضاء مترى هي مجموعة مفتوحة فيه. (العكس ليس بالضرورة صحيح)

**مبرهنة:**

إذا كان  $(X, d)$  فضاءً مترياً كيفياً، و  $A$  مجموعة جزئية من نقاطه، عندئذٍ تكون المجموعة  $A$  مفتوحة في  $(X, d)$  إذا و فقط إذا كانت تساوي اجتماعاً لكرات مفتوحة في هذا الفضاء. مثال: في الفضاء الحقيقي العادي تكون المجموعة  $[4,5[$  مجموعة مفتوحة فيه لأنها كرة مفتوحة في  $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ ، كذلك إن المجموعة  $[4,5[ \cup ]-1,3[$  مجموعة مفتوحة لأنها اجتماع لمجموعات مفتوحة لكنها ليست كرة مفتوحة في  $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ .

**الفضاء التبولوجي:**

**تعريف:** لنكن  $X$  مجموعة كيفية من العناصر و  $P(X)$  أسرة جميع المجموعات الجزئية في  $X$  يقال عن الأسرة  $\tau \subseteq P(X)$  إنها تشكل تبولوجيا على  $X$  إذا و فقط إذا تحققت الشروط الآتية:

$$1. X, \emptyset \in \tau$$

$$2. \text{ من أجل أي أسرة } \{T_i, i \in I\} \subseteq \tau \text{ يكون } \bigcup_{i \in I} T_i \in \tau$$

$$3. \forall T, G \in \tau \Rightarrow T \cap G \in \tau$$

و عندئذٍ تسمى الثنائية  $(X, \tau)$  فضاءً تبولوجياً.

تدعى عناصر الأسرة  $\tau$  مجموعات مفتوحة في الفضاء التبولوجي  $X$  وعناصر المجموعة  $X$  نقاط الفضاء التبولوجي، كما أن متممة كل مجموعة مفتوحة تدعى مجموعة مغلقة في الفضاء التبولوجي  $X$ .

**ملاحظات:**

1. من تعريف المجموعة المفتوحة والمغلقة وتعريف التبولوجيا و قوانين دومرغان نستنتج ما يلي:
  - a. المجموعتان  $X, \emptyset$  مجموعتان مفتوحتان و مغلقتان في أي فضاء تبولوجي  $(X, \tau)$ .
  - b. إن أي تقاطع منتهٍ لمجموعات مفتوحة هو مجموعة مفتوحة في أي فضاء تبولوجي، بينما التقاطع اللانهائي لمجموعات مفتوحة قد لا يكون مجموعة مفتوحة.

مثال: لنأخذ في الفضاء الحقيقي العادي  $(\mathbb{R}, | \cdot |)$  أسرة المجموعات المفتوحة :

$\{T_n = ]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[ ; n \in \mathbb{N}\}$  عندئذ نجد أن:  $\bigcap_{n=1}^{\infty} T_n = \{0\}$  و هي ليست مجموعة مفتوحة فيه لأنها لا تحوي مجالاً مفتوحاً يضم النقطة 0.

c. إن أي اجتماع لمجموعات مفتوحة هو مجموعة مفتوحة في أي فضاء تبولوجي.

d. إن أي تقاطع لمجموعات مغلقة هو مجموعة مغلقة في أي فضاء تبولوجي.

e. إن أي اجتماع منتهٍ لمجموعات مغلقة هو مجموعة مغلقة في أي فضاء تبولوجي، بينما

الاجتماع اللانهائي لمجموعات مغلقة قد لا يكون مجموعة مغلقة:

لنأخذ في الفضاء الحقيقي العادي  $(\mathbb{R}, | \cdot |)$  أسرة المجموعات المغلقة :

$\{F_n = [\frac{1}{n}, 1]; n \in \mathbb{N}\}$  عندئذ إن  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = ]0, 1]$  و هي ليست مجموعة مغلقة في  $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ .

**العلاقة بين الفضاء التبولوجي و الفضاء المتري:**

إذا كان  $(X, d)$  فضاءً مترياً كيفياً، و كانت الأسرة  $\tau$  معرفة بالشكل:

$$\tau = \{T \in P(X) : T \text{ مجموعة مفتوحة في الفضاء المتري } T\}$$

لنبين أن الأسرة  $\tau$  تعرف تبولوجيا على المجموعة  $X$  :

1. من التبولوجيا 1 نجد أن  $X, \emptyset \in \tau$  مجموعتان مفتوحتان في أي فضاء متري  $(X, d)$  لذلك فهما

تحققان تعريف  $\tau$  أي أن  $X, \emptyset \in \tau$ .

2. كذلك نعلم أن أي اجتماع لمجموعات مفتوحة في أي فضاء متري  $(X, d)$  هو مجموعة

مفتوحة لذلك فإنه أياً كانت الأسرة  $\tau$  فإن جميع عناصرها مجموعات مفتوحة

في الفضاء المتري  $(X, d)$  و بالتالي  $\bigcup_{i \in I} T_i$  هو مجموعة مفتوحة فيه و لذلك يكون

$$\bigcup_{i \in I} T_i \in \tau$$

3. أياً كانت  $T, G \in \tau$  نجد إن كلاهما مجموعة مفتوحة في الفضاء المتري  $(X, d)$  و بما

أن أي تقاطع منتهٍ لمجموعات مفتوحة هو مجموعة مفتوحة في أي فضاء متري  $(X, d)$  فإن

$$T \cap G \in \tau \text{ و هذا يعني أن } T \cap G \in \tau$$

فالأسرة  $\tau$  تعرف تبولوجيا على المجموعة  $X$  تسمى التبولوجيا المولدة بتابع المسافة  $d$  و نرمز

لها  $\tau_d$  و يرمز للفضاء التبولوجي الناتج بأحد الرمز  $(X, \tau_d), (X, \tau, d)$ .

نستنتج أن كل فضاء متري  $(X, d)$  يمكن التعبير عنه بفضاء تبولوجي بواسطة  $\tau_d$  و عندئذ

تكون أسرة المجموعات المفتوحة في كلا الفضاءين  $(X, d)$  و  $(X, \tau_d)$  هي ذاتها.

**المسألة العكسية:** هل كل فضاء تبولوجي يمكن تحويله إلى فضاء متري؟

ليس بالضرورة أن يعبر مترياً عن كل فضاء تبولوجي، لنناقش المثالين الآتيين:

**مثال (1):** من أجل أي مجموعة  $X \neq \emptyset$  و  $\tau = P(X)$  التبولوجيا القوية على  $X$

إذا عرفنا التابع  $d$  بالشكل:

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & ; x = y \\ 1 & ; x \neq y \end{cases}$$

فإننا نحصل على الفضاء المتري المنقطع  $(X, d)$  و نعلم أن كل المجموعات الجزئية من  $X$  في

هذا الفضاء هي مجموعات مفتوحة و مغلقة بأن واحد لذلك فإن أسرة المجموعات المفتوحة  $\tau_d$

في  $(X, d)$  هي ذاتها  $\tau = P(X)$  أي أن  $\tau_d = \tau$

و بما أن أسرة المجموعات المفتوحة في كلا الفضاءين  $(X, d)$  و  $(X, P(X))$  متطابقة فإن

الفضاء التبولوجي القوي يمكن التعبير عنه مترياً، و بما أن  $X$  مجموعة كيفية فإن أي فضاء

تبولوجي قوي يمكن تحويله إلى فضاء متري.

**مثال (2):** لنأخذ المجموعة  $X = \{a, b\}$  مع الأسرة  $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}\}$

الفضاء التبولوجي الناتج لا يمكن التعبير عنه مترياً لأنه من أجل أي تابع مسافة  $d$  على  $X$

فإن  $\rho_0 = d(a, b) > 0 ; a \neq b$  ، نأخذ الكرة المفتوحة  $N(b, \rho_0)$  نجد:

$N(b, \rho_0) = \{x \in X; d(x, b) < \rho_0\} = \{b\}$  و بما أن أي كرة مفتوحة في أي فضاء

متري هي مجموعة مفتوحة فيه فإن  $N(b, \rho_0) = \{b\}$  مجموعة مفتوحة في  $(X, d)$  لكنها

ليست مفتوحة في  $(X, \tau)$ ، بالتالي فإن أسرة المجموعات المفتوحة في  $(X, d)$  مختلفة عن أسرة

المجموعات المفتوحة في  $(X, \tau)$  لذلك لا يمكن التعبير عنه مترياً.

### بنية الفضاء التبولوجي:

**تعريف:** ليكن  $(X, \tau)$  فضاءً تبولوجياً كيفياً، و لتكن  $A, B \subseteq X$  مجموعتين كيفيتين من نقاطه،

يقال عن المجموعة  $A$  إنها مجاورة للمجموعة  $B$  في الفضاء  $(X, \tau)$  إذا وجدت مجموعة مفتوحة

في  $(X, \tau)$  مثل  $G$  تحقق:  $B \subseteq G \subseteq A$  ، نرمز لأسرة مجاورات المجموعة  $B$  بالرمز

$$V(B)$$

و في حالة خاصة إذا كانت  $B = \{x\}$  نحصل على تعريف مجاورة نقطة :

$$A \in V(x) \Leftrightarrow \exists T \in \tau: x \in T \subseteq A$$

**تعريف:** ليكن  $(X, \tau)$  فضاءً تبولوجياً كيفياً، و  $A$  مجموعة كيفية من نقاطه، و لتكن  $x \in A$

نقطة كيفية، يقال عن النقطة  $x$  إنها نقطة داخلية في المجموعة  $A$  إذا وفقط إذا وجدت مجموعة

مفتوحة في  $(X, \tau)$  مثل  $G$  تحقق  $x \in G \subseteq A$  ، تسمى مجموعة جميع النقاط الداخلية في

المجموعة  $A$  داخلية المجموعة  $A$  و يرمز لها بأحد الرمزین:  $int(A)$  أو  $A^\circ$

بكلام آخر:  $x$  نقطة داخلية في المجموعة  $A \Leftrightarrow A$  مجاورة للنقطة  $x$

**تعريف:**

ليكن  $(X, \tau)$  فضاءً تبولوجياً كيفياً، و  $A$  مجموعة كيفية من نقاطه، و لتكن  $x \in X \setminus A$  نقطة

كيفية، يقال عن النقطة  $x$  إنها نقطة خارجية للمجموعة  $A$  إذا فقط إذا وجدت مجموعة مفتوحة

في  $(X, \tau)$  مثل  $G$  تحقق  $x \in G \subseteq X \setminus A$  ، تسمى مجموعة جميع النقاط الخارجية للمجموعة

$A$  : خارجية المجموعة  $A$  و يرمز لها  $ex(A)$  .

**ملاحظات و نتائج:**

1. من تعريف النقطة الداخلية في مجموعة نستنتج أنه أيًا كانت المجموعة  $A$  وأياً كان الفضاء

التبولوجي  $(X, \tau)$  فإن الاحتواء  $A^\circ \subseteq A$  محقق دوماً.

2. إذا كانت  $A$  مجموعة مفتوحة في الفضاء التبولوجي  $(X, \tau)$ ، عندئذٍ:

$A$  مجموعة مفتوحة في الفضاء التبولوجي  $(X, \tau) \Leftrightarrow A = A^\circ$  .

3. ليكن  $(X, \tau)$  فضاءً تبولوجياً كيفياً، و لتكن  $A, B \subseteq X$  مجموعتين كيفيتين من نقاطه بحيث

$A \subseteq B$  فإن  $A^\circ \subseteq B^\circ$  .

4. إذا كانت  $A$  مجموعة كيفية من نقاط الفضاء التبولوجي  $(X, \tau)$  ، عندئذٍ إن:

$ex(A) = (X \setminus A)^\circ$  .

5. ليكن  $(X, \tau)$  فضاءً تبولوجياً كيفياً، و لتكن  $A, B \subseteq X$  مجموعتين كيفيتين من نقاطه بحيث

$A \subseteq B$  فإن  $ex(B) \subseteq ex(A)$  .

**مبرهنة:**

إذا كانت  $A$  مجموعة كيفية من نقاط فضاء تبولوجي  $(X, \tau)$  فإن  $A^\circ$  تساوي اجتماع جميع

المجموعات المفتوحة في  $(X, \tau)$  و التي كل منها محتواة في  $A$ .

**نتائج:**

1. من المبرهنة السابقة و من خواص المجموعات المفتوحة نجد انه أيًا كانت المجموعة  $A$  و

أيًا كان الفضاء التبولوجي  $(X, \tau)$  فإن  $A^\circ$  مجموعة مفتوحة فيه و كذلك  $ex(A)$  كونها

تساوي داخلية المتممة.

2. بما أن داخلية المجموعة  $A$  تساوي اجتماع جميع المجموعات المفتوحة في  $(X, \tau)$  و المحتواة في المجموعة  $A$  فإن  $A^\circ$  هي أكبر مجموعة مفتوحة و محتواة في المجموعة  $A$ .

**قضية:** إذا كانت  $A$  مجموعة كيفية من نقاط فضاء تبولوجي  $(X, \tau)$ ، عندئذ تكون المجموعة  $A$  مفتوحة في  $(X, \tau)$  إذا و فقط إذا كانت المجموعة  $A$  مجاورة لكل نقطة من نقاطها في  $(X, \tau)$ .  
خواص:

لتكن  $A, B$  مجموعتين كيفيتين من نقاط  $(X, \tau)$  فضاء تبولوجي، عندئذ:

$$1. \quad ex(A \cup B) = ex(A) \cap ex(B)$$

$$\text{هل } ex(A \cap B) = ex(A) \cup ex(B) \text{ ؟}$$

في الفضاء  $(\mathbb{R}, \tau_{|,|})$  لنأخذ المجموعتين  $A = ]a, b]$  ,  $B = \{a, b\}$  فيكون  $A \cap B = \{b\}$

$$\mathbb{R} \setminus A = ]-\infty, a] \cup ]b, +\infty[ \Rightarrow ex(A) = (\mathbb{R} \setminus A)^\circ = ]-\infty, a[ \cup ]b, +\infty[$$

$$\mathbb{R} \setminus B = ]-\infty, a[ \cup ]a, b[ \cup ]b, +\infty[ \Rightarrow ex(B) = (\mathbb{R} \setminus B)^\circ$$

$$= ]-\infty, a[ \cup ]a, b[ \cup ]b, +\infty[$$

$$ex(A \cap B) = ex(\{b\}) = (\mathbb{R} \setminus \{b\})^\circ = \mathbb{R} \setminus \{b\}$$

$$\text{إن } ex(A) = \mathbb{R} \setminus [a, b] \text{ \& } ex(B) = \mathbb{R} \setminus \{a, b\}$$

$$ex(A) \cup ex(B) = \mathbb{R} \setminus \{a, b\} \text{ مما سبق نجد أن:}$$

$$ex(A \cap B) = \mathbb{R} \setminus \{b\} \neq \mathbb{R} \setminus \{a, b\} = ex(A) \cup ex(B)$$

صحيحة بالضرورة.

$$2. \quad (A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$$

$$3. \quad A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$$

**إثبات:**

$$A \subseteq A \cup B \Rightarrow A^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$$

$$B \subseteq A \cup B \Rightarrow B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$$

$$A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$$

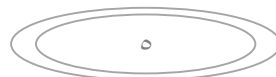
الاحتواء المعاكس غير محقق بصورة عامة كما يبين المثال الآتي:

لنأخذ  $X = \{a, b, c\}$  مع التبولوجيا  $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$  و لتكن:

$$A = \{a\}, B = \{c\}, A \cup B = \{a, c\}$$

$$\text{و } A^\circ = A, B^\circ = \emptyset, (A \cup B)^\circ = \{a, c\}$$

$$A^\circ \cup B^\circ = \{a\} \cup \emptyset = \{a\} \neq \{a, c\} = (A \cup B)^\circ$$



تمرين: لتكن مجموعة الأعداد الحقيقية و نعرف عليها التبولوجيتين  $\tau_1 = \tau_{|.|}$  و

$$\tau_2 = \{T \in P(\mathbb{R}) : \{1,2\} \subseteq T\} \cup \{\emptyset\}$$

و لنأخذ المجموعة  $A = ]1,2[$  و  $B = [0,3]$  و  $C = \{1,2\}$

، و المطلوب إيجاد  $A^\circ, B^\circ, C^\circ$  و  $ex(A), ex(B), ex(C)$  في كل من الفضاء

$$(\mathbb{R}, \tau_1) = (\mathbb{R}, \tau_{|.|}) \text{ و الفضاء } (\mathbb{R}, \tau_2).$$

في الفضاء  $(\mathbb{R}, |.|)$ :

$$A^\circ = ]1,2[, B^\circ = ]0,3[, C^\circ = \emptyset$$

$$ex(C) = \mathbb{R} \setminus C, ex(B) = \mathbb{R} \setminus B, ex(A) = ]-\infty, 1[ \cup ]2, +\infty[$$

في الفضاء  $(\mathbb{R}, \tau_2)$ :

$$ex(C) = \emptyset, ex(B) = \emptyset \text{ و } ex(A) = \emptyset \text{ و } A^\circ = \emptyset, B^\circ = B, C^\circ = C$$