كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : نظرية القياس

المحاضرة : الاولى/نظري/

مفردات نظرية القياس:

فصل (1): الحلقات، الجبور، الجبور التامة
فصل (2): فضاء القياس المجرد.
فصل (3): قياس لوبيغ
فصل (4): الدوال القيوسة
فصل (5): المكاملة
فصل (6): فضاء القياس الجداء.
فصل (7): أنواع التقارب المرتبطة بالقياس.

المجموعة: هي شيء يتكون من عدة وحدات بحيث ندعو كل وحدة عنصر من عناصر هذه المجموعة ونرمز للمجموعات عادة بأحرف لاتينية كبيرة مثل $A, B, C, \dots$ ولعناصرها بأحرف لاتينية صغيرة $a, b, c, \dots$

العمليات على المجموعات:

أولاً: التقاطع والاجتماع: لتكن A و B مجموعتين جزئيتين من مجموعة ما Ω نرمز لاجتماعها بين المجموعتين بالرمز $A \cup B$ ونعرفه بأنه مجموعة العناصر المشتركة وغير المشتركة بين المجموعتين A و B أي:

$$A \cup B = \{x ; x \in A \text{ or } x \in B\}$$

أما تقاطعهما أي تقاطع A و B فهو مجموعة نرمز لها بالرمز $A \cap B$ ونعرفها بأنها مجموعة العناصر المشتركة بين المجموعتين A و B أي:
$$A \cap B = \{x ; x \in A \text{ and } x \in B\}$$

ملاحظة: ندعو على التوالي الاجتماع والتقاطع المعرف أعلاه بالاجتماع والتقاطع المنتهي واختصاراً الاجتماع والتقاطع ويمكن تعميمه بالشكل:

إذا كانت $A_1, \ldots, A_n$ أسرة من المجموعات عندئذٍ فإنَّ:
$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \quad ; n < \infty$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \quad ; n < \infty$$
وهذا أيضاً على التوالي ندعوه اجتماع منتهٍ وتقاطع منتهٍ.

* أما إذا كانت $A_1, A_2, \ldots, A_n$ أسرة غير منتهية من المجموعات عندئذٍ لدينا:
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$$
وندعوه بالاجتماع المعدود (القابل للعد)
وكذلك فإنَّ:
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \cap \ldots$$
ندعوه تقاطع معدود (قابل للعد).

ثانياً: فرق مجموعتين: لتكن A و B مجموعتين جزئيتين من مجموعة ما لذا نرمز لفرق المجموعتين A و B بالرمز $A \setminus B$ أو $A - B$ وندعوه أحياناً بالفرق النسبي ونعرفه بأنّه مجموعة العناصر

التي تنتمي إلى A و لا تنتمي إلى B

$A \setminus B = A - B = \{x ; x \in A \text{ and } x \notin B\}$

ثالثاً: الفرق التناظري: لتكن A و B مجموعتين جزئيتين من مجموعة ما Ω حيث $\Omega \neq \phi$

نرمز للفرق التناظري للمجموعتين A و B بالرمز $A \Delta B$

ونعرفه بأنه المجموعة العناصر التي تنتمي إلى A و لا تنتمي إلى B مضافاً مجموعة العناصر التي تنتمي إلى B و لا تنتمي إلى A أي:

$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

ملاحظة: رويداً الفرق التناظري يختلف عن الفرق النسبي أي الفرق العادي، وإذا لم نشر إلى الفرق النسبي إلا بالفرق فإننا نقصد الفرق النسبي.

رابعاً: متممة مجموعة ما: إذا كانت Ω مجموعة ما و A مجموعة جزئية منها أي $A \subset \Omega$ عندئذ نرمز لمتممة المجموعة A بالرمز $\bar{A}$ أو A' ونعرفها بأنها مجموعة العناصر التي تنتمي إلى Ω و لا تنتمي إلى A أي:

$\bar{A} = \underset{(\text{فرق})}{\Omega - A} = \{x ; x \in \Omega \text{ and } x \notin A\}$

ملاحظة: نلاحظ أن كلاً من الاجتماع والتقاطع والفرق التناظري عمليات تبديلية وتجميعية ولكن الفرق ليس عملية تبديلية.

خواص العمليات على المجموعات:

لتكن Ω مجموعة ما غير خالية و A و B و C مجموعات جزئية منها عندئذٍ:

① $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

التقاطع توزيعي على الاجتماع من اليسار.

$(B\cup C)\cap A=(B\cap A)\cup(C\cap A)$

التقاطع توزيعي على الاجتماع من اليمين.

② الاجتماع توزيعي على التقاطع من اليسار ومن اليمين:

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$(B\cap C)\cup A=(B\cup A)\cap(C\cup A)$

③ $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$

④ $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

⑤ $(A-B)\cap(B-A)=\phi$

⑥ $\overline{\overline{A}}=A$ (متممة المتممة هي نفسها)

⑦ قانونا دومورغان:

$\overline{(A\cup B)}=\bar{A}\cap\bar{B}$

$\overline{(A\cap B)}=\bar{A}\cup\bar{B}$

⑧ $A\Delta B=(A\cup B)-(B\cap A)$

⑨ $A\cap B=(A\cup B)-(A\Delta B)$

⑩ $A\cup B=(A\Delta B)\Delta(A\cap B)$

⑪ $A\setminus B=A\Delta(A\cap B)$

⑫ $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$

برهن أن $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ بطريقة العناصر

يجب أن نبرهن أنّ:

$$A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

$$(A\cup B)\cap(A\cup C)\subseteq A\cup(B\cap C)$$

الحل:

$$A\cup(B\cap C)=\{x ; x\in A \vee x\in(B\cap C)\}$$
$$=\{x ; x\in A \vee (x\in B \wedge x\in C)\}$$
$$=\{x ; (x\in A \vee x\in B)\wedge(x\in A \vee x\in C)\}$$
$$=\{x ; (x\in A\cup B)\cap(x\in A\cup C)\}$$
$$=\{x ; x\in A\cup B\}\cap\{x ; x\in A\cup C\}$$
$$=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

أو بطريقة أخرى:

$$\forall x\in(A\cup(B\cap C)) \Leftrightarrow x\in A \vee x\in B\cap C$$
$$\Leftrightarrow x\in A\vee(x\in B \wedge x\in C)$$
$$\Leftrightarrow (x\in A \vee x\in B)\wedge(x\in A \vee x\in C)$$
$$\Rightarrow x\in(A\cup B)\wedge(x\in A\cup C)$$
$$\Leftrightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

ملاحظة: يمكن تعميم قانونا دي مورغان بالشكل التالي:

- إذا كانت $A_1, A_2, ..., A_n$ متتالية منتهية من المجموعات الجزئية من مجموعة ما غير خالية هي فإنّ:

$$\overline{(A_1\cup A_2\cup ...\cup A_n)}=\overline{\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}=\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap ...\cap\overline{A_n}$$

$$\overline{(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)} = \overline{\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$
$$= \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \dots \cup \overline{A_n}$$

ب- إذا كان $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ متتالية غير منتهية من المجموعات الجزئية من مجموعة ما غير خالية Ω عندئذٍ فإن:

$$\overline{\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)} = \overline{(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots)}$$
$$= \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n} \cap \dots$$
$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$$

$$\overline{\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)} = \overline{(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cup \dots)}$$
$$= \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \dots \cup \overline{A_n} \cup \dots$$
$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$$

تعريف المجموعة المنتهية:

نقول عن المجموعة Ω إنها مجموعة منتهية إذا كانت تساوي الخالية أو إذا كان بالإمكان إيجاد تطبيق تقابل
$\Omega \longrightarrow I_n = \{1, 2, \dots, n\} \subseteq \mathbb{N}$ حيث:
في هذه الحالة نقول إن المجموعتين Ω و I_n ~~مجموعتين~~ مجموعتان متكافئتان وعدد عناصر المجموعة Ω يساوي عدد عناصر المجموعة I_n أي أن:

$$|\Omega| = |I_n| = n < \infty$$

وخلاف ذلك نقول إنّ Ω غير منتهية.

ملاحظة: يمكن تعريف المجموعة المنتهية بالشكل التالي:

نقول عن المجموعة E إنها مجموعة منتهية إذا كان عدد عناصرها منتهٍ وأصغر من ∞.

خلاف ذلك نقول إنها مجموعة غير منتهية

ودوماً لدينا المجموعة الخالية عدد عناصرها يساوي الصفر وبالتالي فهي مجموعة منتهية.

بعض الأمثلة:

① أي مجموعة من الشكل: $\{1, 2, ..., n\} \subseteq \mathbb{N}$ حيث $n < \infty$ هي مجموعة منتهية.

② إنّ كلاً من المجموعات العددية التالية:

مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$

مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$

مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة $\mathbb{Z}^-$

مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة $\mathbb{Z}^+$

مجموعة الأعداد العادية $\mathbb{Q}$

مجموعة الأعداد الصماء (غير العادية)

مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$

هي مجموعات غير منتهية.

③ مجموعة عناصر المجال الحقيقي $[0,1]$ هو مجموعة غير منتهية.

تعريف المجموعة المعدودة (القابلة للعد):

نقول عن المجموعة E إنها مجموعة معدودة أو قابلة للعد إذا كان بالإمكان إيجاد تطبيق تقابل $E \to IN$ حيث $\varphi : IN$
وخلاف ذلك نقول إنها مجموعة غير معدودة أو غير قابلة للعد.

بعض الأمثلة:

1) كل مجموعة منتهية هي مجموعة معدودة.

2) إن كلاً من المجموعات العددية التالية:
IN ، Z ، Z^- ، Z^+ ، Q هي مجموعات معدودة وغير منتهية.

3) حدود أي متتالية غير منتهية وطبعاً عددية $\{a_1, \dots a_n, \dots\}$ هي مجموعة معدودة ولكن غير منتهية.

4) إن كلاً من المجموعات العددية التالية IR ، $IR-Q$ (الصماء) ، C مجموعات غير معدودة وغير منتهية.

نتيجة هامة:

الاجتماع المعدود (والمنتهي) لمجموعات معدودة هو مجموعة معدودة أي إذا كانت $A_1, \dots, A_n$ مجموعات معدودة عندئذٍ فإن:

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

اجتماع منتهٍ

هو مجموعة معدودة.

أما إذا كانت $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots$ مجموعات معدودة عندئذٍ فإن:

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_i \cup \dots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

اجتماع معدود

هو مجموعة معدودة

نتيجة: كل مجموعة غير منتهية تحوي مجموعة جزئية معدودة واحدة على الأقل

مثال: مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ مجموعة غير منتهية وهي تحوي مجموعات جزئية عددية معدودة مثل: $\mathbb{Q}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}^-, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}^+$

تعريف المجموعة المعدودة على الأكثر: نقول عن المجموعة Ω إنها معدودة على الأكثر إذا كانت منتهية أو معدودة.

تعريف مجموعة الأجزاء: لتكن Ω مجموعة ما غير خالية نسمي مجموعة جميع المجموعات الجزئية المشكلة من المجموعة Ω مجموعة أجزاء Ω ونرمز لها بالرمز $P(\Omega)$ أو 2^{Ω}

وإذا كانت Ω مجموعة منتهية وعدد عناصرها هو n حيث $n<\infty$ عندئذٍ فإنّ: $|P(\Omega)| = 2^{\Omega}$

نتيجة: إذا كانت $A \subseteq \Omega \iff A \in P(\Omega)$

ملاحظة: إذا كانت كلاً من المجموعات التالية $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مجموعات جزئية من Ω عندئذٍ فإنّ $\{A_1, \ldots, A_n\}$ مجموعة جزئية من $P(\Omega)$ أي

$$\{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq P(\Omega)$$

مثال: إذا كانت $\Omega = \{3, 7, 11\}$ عندئذٍ فإنّ مجموعة أجزاء Ω وهي $P(\Omega)$ هي:

$$P(\Omega) = \{\phi, \{3\}, \{7\}, \{11\}, \{3,7\}, \{3,11\}, \{7,11\}, \{3,7,11\}\}$$

وعدد عناصرها $P(\Omega)$ هو: $2^{|\Omega|} = 2^3 = 8$

إنَّ $A_1 = \{11\} \subseteq \Omega$ ومنه:

$A_1 = \{11\} \subseteq P(\Omega)$

إنَّ $A_2 = \{3, 11\} \subseteq \Omega$

$A_2 = \{3, 11\} \subseteq P(\Omega)$

إنَّ $\{A_1, A_2\} = \{\{11\}, \{3, 11\}\} \subseteq P(\Omega)$

مجموعة جزئية من $P(\Omega)$

* ندعو $\{A_1, A_2\} \subseteq P(\Omega)$ في هذا المثال صف أو عائلة أو أسرة أو جماعة من أجزاء Ω

تعريف هام:

ندعو أي مجموعة جزئية D من $P(\Omega)$ بصف أو عائلة أو جماعة أو أسرة من أجزاء Ω على سبيل المثال

$D = \{A_1, A_2\} = \{\{11\}, \{3, 11\}\} \subseteq P(\Omega)$

من المثال السابق ونرمز عادةً للصف من أجزاء Ω بـ F , A , D

ملاحظة: إذا كانت $A_1, \dots, A_n$ مجموعات جزئية من المجموعة Ω أي:

$A_i \subseteq \Omega$ و $i = 1, 2, \dots, n$ و $n < \infty$

عندئذٍ فإنَّ:

$\{A_1, \dots, A_n\} \subseteq P(\Omega)$

صف من أجزاء Ω وهي مجموعة جزئية من $P(\Omega)$

أمثلة أخرى على صف من أجزاء Ω تابع للمثال السابق:

$$F_1 = \{\phi, \{3,7\}, \{7\}\} \subseteq P(\Omega)$$

$$F_2 = \{\{7\}, \{3,11\}, \{3,7,11\}\} \subseteq P(\Omega)$$

$$F_3 = P(\Omega) \subseteq P(\Omega)$$

$$F_4 = \{\phi\} \subseteq P(\Omega)$$

انتهت المحاضرة