كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : معادلات تفاضلية2

المحاضرة : الاولى/نظري/

- المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية ذات الامثال المتغيرة:

لها الشكل: $y'' + P(x)y' + q(x)y = R(x)$

وهو الشكل العام للمعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية ذات الامثال المتغيرة.

- حالات خاصة

1- معادلة كوشي أولر:

$$x^2y'' + axy' + by = R(x) \quad ------ *$$

متجانسة بالنسبة لـ (x) ولحلها نفرض $x = e^t \Leftarrow t = \ln(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = y'_t \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow y' = \frac{y'_t}{x} \Rightarrow xy' = y'_t$$

$$\frac{d^2y}{d^2x} = \frac{d}{dx}\left(y'_t\cdot\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}\cdot\frac{dy'}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} - \frac{1}{x^2}\cdot y'_t$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(y''_t - y'_t\right) \Rightarrow x^2y'' = y''_t - y'_t$$

بالتعويض بالمعادلة * تتحول إلى معادلة ذات امثال ثابتة

مثال:

$$x^2y'' - 3xy' + 3y = x$$

نفرض $x = e^t \Longleftarrow$ $xy' = y'_t$ ، $x^2y'' = y''_t - y'_t$

$y''_t - y'_t - 3y'_t + 3y = e^t \Longrightarrow y''_t - 4y'_t + 3y = e^t$

لحل المعادلة الخطية للأمثال الثابتة نحل المتجانسة:

$m^2 - 4m + 3 = 0$

$(m-3)(m-1) = 0 \Longrightarrow m_1 = 3 , m_2 = 1$

$y_h = c_1 . e^t + c_2 . e^{3t}$

$y_p = A t e^t \quad \times 3$

$y'_p = A e^t + A t e^t \quad \times -4$

$y''_p = 2A e^t + A t e^t \quad \times 1$

بالضرب ثم الجمع نجد: $\Longrightarrow -2A e^t = e^t \Longrightarrow A = -\frac{1}{2}$

$y_p = -\frac{1}{2} t e^t$

$y(t) = y_h + y_p = c_1 e^t + c_2 e^{3t} - \frac{1}{2} t e^t$

ولدينا $e^t = x$ و $t = \ln(x) \Longleftarrow$

$y(x) = c_1 x + c_2 x^3 - \frac{1}{2} x \ln(x)$

2- معادلة لاغرانج:

الشكل العام: $(ax+b)^2 y'' + a_1 (ax+b) y' + a_2 y = R(x)$

لحلها نفرض $Z = ax + b$ ثم $Z = e^t$

مثال: $(3x+2)^2 y'' + 3(3x+2) y' - 36 y = 3x^2 + 4x + 1$

الحل: معادلة لاغرانج

$Z = 3x + 2 \Longrightarrow x = \frac{Z-2}{3}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dZ} \times \frac{dZ}{dx} = 3 y'_Z$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(3y'_Z) \frac{dZ}{dx} = 9 y''_Z$

بالتعويض بالمعادلة نجد:

$$9Z^2 y''_Z + 9Z y'_Z - 36y = 3\left(\frac{Z-2}{3}\right)^2 + 4\left(\frac{Z-2}{3}\right) + 1$$

لحلها نفرض $Z = e^t$ ونكمل الحل (كوشي اولر) بنفس طريقة السابقة.

3) $y'' = R(x)$

4) $y'' + P(x) y' = R(x)$.

فالية منه y نفرض $y' = Z$ وتصبح $Z' + P(x) Z = R(x)$.

في الحالة العامة نناقش طريقتين لحل معادلة تفاضلية خطية ذات امثال متغيرة من المرتبة 2 ولكن كل من هاتين الطريقتين لها شرط لتطبيقها.

الطريقة الاولى:

1 - طريقة تغيير التابع:

$$y'' + P(x) y' + q(x) y = R(x).$$

$y = U.V$ (الفرض).

نعوض بالمعادلة:

$$y' = U'V + U.V'$$
$$y'' = U''V + 2U'V' + UV''$$

نعوض بالمعادلة:

$$UV'' + 2U'V' + U''V + P(x) U'.V + P(x) U.V' + q(x) U.V = R(x)$$

$$UV'' + (2U' + P(x) U) V' + (U'' + P(x) U' + q(x) U) V = R(x)$$

نقسم الطرفين على U.

$$V'' + (\underbrace{2\frac{U'}{U} + P(x)}_{0})V' + (\underbrace{\frac{U''}{U} + P(x)\frac{U'}{U} + q(x)}_{Q})V = \frac{R(x)}{U(x)} \quad (1)$$

نختار U بحيث تكون أمثال U' صفر ⟸ :

$$2\frac{U'}{U} + P(x) = 0 \Rightarrow \ln U = -\int \frac{P(x)}{2}dx \Rightarrow U = e^{-\int \frac{P(x)}{2}dx}$$

يصبح لدينا :

$$V'' + Q(x)V = \frac{R(x)}{U(x)}$$

$$Q(x) = \frac{U''}{U} + P\frac{U'}{U} + q.$$

$$U' = -\frac{P}{2}U \; ; \; \frac{U'}{U} = -\frac{P}{2} \Rightarrow U'' = -\frac{1}{2}P'U - \frac{1}{2}PU'.$$

$$\frac{U''}{U} = -\frac{P'}{2} - \frac{P}{2}\frac{U'}{U}.$$

$$Q(x) = -\frac{P'}{2} + \frac{P^2}{4} - \frac{P^2}{2} + q$$

$$-\frac{P'}{2} - \frac{P^2}{4} + q = a \text{ (أمثاله ثابتة)}$$

أو $= \frac{a}{x^2}$ (كوشي أولر)

أو $\frac{a}{(ax+b)}$ (لاغرانج)

$U = e^{-\int \frac{P}{2}dx}$ نتحقق من الشرط ومنه ثم نفرضه

ومنه ثم نفرضه $y = U.V$.

مثال

$$x^2y''-2xy'+(x^2+2)y=\frac{x^3}{\sin x}$$

الحل

نقسم على امثال y''

$$y''-\frac{2}{x}y'+\left(1+\frac{2}{x^2}\right)y=\frac{x}{\sin x}$$

$$P(x)=-\frac{2}{x},\quad q(x)=1+\frac{2}{x^2}$$

$$-\frac{P'}{2}-\frac{P^2}{4}+q=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}+1+\frac{2}{x^2}=1 \quad \text{محققة}$$

$$U=e^{\int\frac{P(x)}{2}}=e^{\int\frac{dx}{x}}=x$$

نفرضه ⟸ $y=U.V$

$$y=U.V\Rightarrow y=x.V\Rightarrow y'=V+xV'$$

$$y''=2V'+xV''+2V'+xV''-\frac{2}{x}(V+xV')+\left(1+\frac{2}{x^2}\right)xV=\frac{x}{\sin x}$$

$$xV''+xV=\frac{x}{\sin x}$$

نقسم على x ⟸

$$V''+V=\frac{1}{\sin x}$$

$$m^2+1=0\Rightarrow m_{1,2}=\mp i$$

$$V_{(h)}=C_1\cos x+C_2\sin x$$

$$V_{(P)}=-x\cos x+\sin x\ln(\sin x)$$

$$V=V_P+V_h$$

$$y=xV=C_1\cos x+C_2x\sin x-x^2\cos x+x\sin x\ln\sin x$$

انتهت المحاضرة