كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : فيزياء للرياضيات

المحاضرة : الثالثة والرابعة/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Z مكتبة

الفصل الثاني ②: إحصاء ماكسويل بولتزمان (M-B)

ت: 25/05/2025
1/06/2025
15/06/2025

تطبيقات إحصاء ماكسويل بولتزمان
تطبيقات تابع التقاسم لماكسويل - بولتزمان

Ⅰ. إحصاء ماكسويل بولتزمان (M-B) - الإحصاء الكلاسيكي

• **مقدمة**:
نميز في الجمل الترموديناميكية نوعين من الجسيمات: كلاسيكية (متمايزة: $A, B, C, \ldots$) وتخضع لإحصاء ماكسويل بولتزمان.
* كمية (غير متمايزة: $\circ, \circ, \circ, \ldots$) وتخضع لإحصاء بوز-اينشتاين.

- سنتناول في البداية "الجسيمات الكلاسيكية" وهي جسيمات متطابقة وغير متفاعلة مع بعضها ولا ينطبق عليها مبدأ الاستبعاد لباولي.
ونطبق على: الغازات المثالية - تفاعلات الإشعاع مع المادة - إصدار الليزر.

- ونطبقه على الجمل الترموديناميكية المعزولة.

• **عبارة الوزن الإحصائي لتوزع ماكسويل بولتزمان**:
- وفقاً لمبادئ العدّ فإن عدد طرق التوزيع الميكروية N جسيم متمايز على M سوية طاقية، حيث:

$$N = N_1 + N_2 + \cdots + N_M = \sum_{i=1}^{M} N_i$$

هو: $$w' = \frac{N!}{\prod_{i=1}^{M} N_i!} \quad \cdots (1)$$

- ومن أجل السوية i المتميزة بالمقدار g_i، فإن عدد طرق التوزيع الميكروية على g_i خلية هو:

$$w'' = g_i^{N_i} \Rightarrow \underset{M \text{ سوية}}{\text{ومن أجل}} \Rightarrow w'' = \prod_{i=1}^{M} g_i^{N_i} \quad \cdots (2)$$

- فيكون عدد حالات التوزع الميكروي الإجمالي الموافقة لحالة التوزع الماكروسكوبية: مسبقة التوزع $(N_1, N_2, \ldots, N_M)$ هو:

$$W_{M-B} = w' \cdot w'' = \frac{N!}{\prod_{i=1}^{M} N_i!} \cdot \prod_{i=1}^{M} g_i^{N_i} \Rightarrow \boxed{W_{(M-B)} = N! \prod_{i=1}^{M} \frac{g_i^{N_i}}{N_i!}}$$

- **ملاحظة ①**:
* الحالات الماكروية [تكون بعيدة عن التفاصيل، وتمثيلها يكون رمزي].
* قانونها عام وينطبق على كافة التوزعات، ويعطى وفقاً لمبادئ العد بالعلاقة:

$$\boxed{N_0 = \frac{(N + N_\varepsilon - 1)!}{N! \, (N_g - 1)!}}$$

- ملاحظة ②:

* الحالات الميكروية [نهتم بالتفاصيل ، وتمثيلها يكون بواسطة الرموز على سويات الطاقة]

* يوافق كل حالة توزع ماكروية عدد من الحالات الميكروية ، ويعطى هذا العدد حالات التوزع الميكروية (الوزن الإحصائي) وفقاً للإحصاء المطلوب (كلاسيكي أو كمي) .

- معادلة لانغرانج :

في حالة التوازن فإن الجملة الترموديناميكية المعزولة يكون من أجلها:

$$\boxed{d\ln W_{max} + \alpha N + \beta U = cte}$$

حيث α و β مضاريب لاغرانج ، α عديم البعد و $[\beta] = J^{-1}$.

- إيجاد عبارة إشتغال السوية الطاقية في حالة التوزع المنفصل لـ سويات الطاقة :

ننطلق من شرط الاتزان للجملة المعزولة المتوازنة : $d\ln W_{max} + \alpha\, dN + \beta\, dU = 0$ ----- ①

$$W_{M-B} = N! \prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow \ln W_{M-B} = \ln N! + \sum_i [N_i \ln g_i - \ln N_i!]$$

نستخدم تقريب ستيرلنغ الأول : $\ln x! = x\ln x - x \Rightarrow \ln W_{M-B} = N\ln N - N + \sum_i [N_i \ln g_i - N_i \ln N_i + N_i]$

وحيث أننا نبحث عن N_i الموزعة على ε_i والتي لها g_i محددة فإن:

$$d\ln W_{M-B} = \frac{\partial \ln W_{M-B}}{\partial N_i} dN_i = 0 - 0 + \sum_i [\ln g_i - \ln N_i - 1 + 1] dN_i = \sum_i \ln \frac{g_i}{N_i} . dN_i \quad ②$$

- وبالأخذ بعين الاعتبار شرطي انحفاظ الطاقة وعدد الجسيمات :

$$U = \sum_i \varepsilon_i N_i \Rightarrow dU = \sum_i \varepsilon_i dN_i \quad ③ \; ; U = cte \quad \& \quad N = \sum_i N_i \Rightarrow dN = \sum_i dN_i \; ; N = cte \quad ④$$

وبتعويض ② و ③ و ④ في ① نجد :

$$\sum_i \left(\ln \frac{g_i}{N_i} + \alpha + \beta\varepsilon_i\right) dN_i = 0 \quad ; dN_i \neq 0 \Rightarrow \ln \frac{g_i}{N_i} + \alpha + \beta\varepsilon_i = 0$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{g_i}{N_i}\right) = -(\alpha + \beta\varepsilon_i) \Rightarrow N_i = g_i\, e^{\alpha + \beta\varepsilon_i} \Rightarrow \boxed{N_i = e^{\alpha} g_i\, e^{\beta\varepsilon_i}} \; ; \beta = -1/KT$$

وهي عبارة الإشتغال (عدد سكان) السوية ε_i ذات درجة التحلل g_i .

* وفي حال التوزع المستمر يكون :

$$\boxed{dN(\varepsilon) = e^{\alpha} e^{\beta\varepsilon} g(\varepsilon)\, d\varepsilon}$$

وتعبر العلاقة الأخيرة عن عدد الجسيمات الواقعة في المجال الطاقي $[\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon]$.

- ملاحظة :

* يكون التوزع معتدل عندما $N = \sum N_i$ وطبيعي عندما يكون $N = \sum N_i$ و $N_1 > N_2 > \dots > N_M$

بحيث أن : $(N_i (\varepsilon_i \to \infty) \longrightarrow 0)$.

أي في التوزع الطبيعي : يكون عدد الجسيمات في السويات الطاقية الدنيا أكبر من عدد الجسيمات الواقعة في السويات العليا.

• تابع تجاحب ماكسويل - بولتزمان :

يمكن كتابة احتمال وجود الجسيم في حالة طاقية ε_i بالشكل :

$$P_i = \frac{1}{Z} g_i e^{\beta \varepsilon_i} \quad ; \quad Z = \sum_i g_i e^{\beta \varepsilon_i}$$

وكما نلاحظ من العبارتين فإن Z هو عامل تنظيم يعبر عن حصة درجة التقلل الواحدة من طاقة الجسم.
(واحدة)

ولكن : $N = \sum N_i = e^{\alpha} \sum_i g_i e^{\beta \varepsilon_i} = e^{\alpha} Z \Rightarrow \boxed{e^{\alpha} = \frac{N}{Z}} \Longrightarrow \boxed{N_i = \frac{N}{Z} g_i e^{\beta \varepsilon_i} \; ; \; \beta = -1/kT}$

• إيجاد Z في الحالة المستمرة :

$$Z = \int_0^{\infty} e^{\beta \varepsilon} g(\varepsilon) d\varepsilon \quad ; g(\varepsilon) d\varepsilon = \int_0^{\infty} C V 2\pi (2m)^{3/2} \varepsilon^{1/2} e^{\beta \varepsilon} d\varepsilon \quad ; \quad \beta = -1/kT$$

$$\Rightarrow Z = C V 2\pi (2m)^{3/2} \int_0^{\infty} \varepsilon^{1/2} e^{-\varepsilon / kT} d\varepsilon$$

نضع $x = \frac{\varepsilon}{kT} \Rightarrow dx = \frac{1}{kT} d\varepsilon$ « وحدود التكامل تبقى كما هي »

$$\Rightarrow Z = 2\pi C V (2m)^{3/2} \int_0^{\infty} (kT)^{1/2} x^{1/2} e^{-x} kT \, dx = 2\pi C V (2mkT)^{3/2} \underbrace{\int_0^{\infty} x^{1/2} e^{-x} dx}_{\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{Z = C V (2\pi m k T)^{3/2}}$$

مسائل وتطبيقات

المسألة الأولى (1) :

يوزع جسيمان (A,B) متمايزان على مستويين للطاقة $\varepsilon_1=\varepsilon_0$ و $\varepsilon_2=2\varepsilon_0$ منحلّين بالشكل : $(g_1=g_2=2)$. والمطلوب : أوجد الحالات الماكروية الممكنة، وطاقة كل منها، وعدد حالات التوزع الميكروية الموافقة لكل حالة توزع ماكروي، ومثلها، وأوجد الحالة الماكروية الأكثر احتمالاً .

الجواب :

عدد حالات التوزع الماكروي : $N_0=\dfrac{(N+N_\varepsilon-1)!}{N!\,(N_\varepsilon-1)!}=\dfrac{(2+2-1)!}{2!\,(2-1)!}=3$

تمثيل الحالات مع طاقة كل منها : $\{(2,0),\ (0,2),\ (1,1)\}$ ، $U=2\varepsilon_0$ ، $U=4\varepsilon_0$ ، $U=3\varepsilon_0$

• إيجاد الوزن الإحصائي [عدد حالات التوزع الميكروية] الموافق لكل توزع من التوزعات الثلاث :

• الحالة (2,0) : $W_{(2,0)}=2!\left[\dfrac{2^2}{2!}\cdot\dfrac{2^0}{0!}\right]=4 \xRightarrow{\text{تمثيلها}}$

ε_2 : | ، | ، | ، |
ε_1 : A | B ، B | A ، AB | ، | AB

• الحالة (0,2) : $W_{(0,2)}=2!\left[\dfrac{2^0}{0!}\cdot\dfrac{2^2}{2!}\right]=4 \xRightarrow{\text{تمثيلها}}$

ε_2 : A | B ، B | A ، AB | ، | AB
ε_1 : | ، | ، | ، |

• الحالة (1,1) : $W_{(1,1)}=2!\left[\dfrac{2^1}{1!}\cdot\dfrac{2^1}{1!}\right]=8 \xRightarrow{\text{تمثيلها}}$

ε_2 : A | ، A | ، | A ، | A ، B | ، B | ، | B ، | B
ε_1 : B | ، | B ، B | ، | B ، A | ، | A ، A | ، | A

• والحالة الأكثر احتمالاً هي الحالة الموافقة لوزن إحصائي أعظمي ($W_{max}=8$) أي الحالة : (1,1) .

ملاحظة ①:

إذا كانت لدينا حالتان ماكرويتين لهما وزن إحصائي أعظمي فإن الحالة الأكثر احتمالاً تكون الحالة الأقل طاقة بينهما .

ملاحظة ②:

الحدود المضروبة $\prod_i$ في علاقة الوزن الإحصائي (W_i) وكذلك الحدود المجموعة $\sum_i$ في عبارة طاقة الحالة (U) يكون عددها من عدد سويات الطاقة المعطاة في المسألة .

المسألة الثانية (2) :

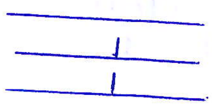
جملة مكونة من 1000 جسيم متمايز، موزعة على ثلاث سويات للطاقة :

$\varepsilon_1 = KT(J)$; $\varepsilon_2 = 2KT(J)$; $\varepsilon_3 = 3KT(J)$

ومنحلة بالشكل : $g_1 = g_2 = 2$ & $g_3 = 1$. والمطلوب :

1. ارسم هيكل السويات والتحللات للجملة، ثم أوجد عدد حالات التوزع الماكروي الإجمالي
2. أي من الحالات التالية يعتبر مقبول، ثم بين علمياً إذا كان المقبول منها طبيعي أم غير طبيعي.
3. أوجد أرقام إشغال الحالة الأكثر احتمالاً : $\left(\overset{\varepsilon_1}{N_1}, \overset{\varepsilon_2}{N_2}, \overset{\varepsilon_3}{N_3}\right)_{max}$ ، ثم تحقق من أنها حالة طبيعية إذا كانت طبيعية (تأكد أولاً أنها مقبولة عبر الشرط $N = \sum N_i$ ومن ثم شرط التوزع الطبيعي $N_1 > N_2 > N_3$)، ثم احسب طاقة هذه الحالة بدلالة KT علماً أنه : $[e^{-3} = 0.05$ & $e^{-2} = 0.135$ & $e^{-1} = 0.368]$
4. برهن أن الوزن الإحصائي للحالة الأكثر احتمالاً أكبر من وزن الحالة (N_1+1, N_2-2, N_3+1)

الجواب : (1).



هيكل السويات وتحللاتها

$$N_0 = \frac{(N+N_\varepsilon-1)}{N!\,(N_\varepsilon-1)!} = \frac{1002!}{1000!\cdot 2!}$$

$$= \frac{1002 \times 1001 \times 1000!}{1000! \times 2!} = 501\,501$$ حالة توزع ماكروي

(2).

$(600, 300, 200)$	$(300, 500, 200)$	$(800, 200, 2)$
مقبولة وطبيعية	مقبولة وغير طبيعية	غير مقبول
$N = \sum N_i = 1000$	$N = \sum N_i = 1000$	$N \neq \sum N_i \Leftrightarrow 1000 \neq 1002$
$N_1 > N_2 > N_3 \Leftrightarrow 600 > 300 > 200$	$N_1 < N_2 \Leftrightarrow 300 < 500$	

(3). لدينا عبارة رقم الإشغال الحالة الأكثر احتمالاً :

$$N_i = \frac{N}{Z} g_i e^{-\varepsilon_i/KT} \Rightarrow Z = \sum_i g_i e^{-\varepsilon_i/KT} = 2e^{-1} + 2e^{-2} + e^{-3} = 1.056$$

$\Rightarrow$ رقم إشغال السوية الأولى : $N_1 = \frac{1000}{1.056} \cdot 2 \cdot e^{-1} \simeq 697$

رقم إشغال السوية الثانية : $N_2 = \frac{1000}{1.056} \cdot 2e^{-2} \simeq 256$

رقم إشغال السوية الثالثة : $N_3 = \frac{1000}{1.056} \cdot e^{-3} \simeq 47$

$\Longrightarrow N = \sum_i N_i = 697 + 256 + 47 = 1000$ مقبول

$N_1 > N_2 > N_3 \Leftrightarrow 697 > 256 > 47$ طبيعي

$$U_{(N_1,N_2,N_3)_{max}} = \sum_i \varepsilon_i N_i = 697KT + 512KT + 141KT = 1350\ KT\ \text{Joul}$$

④. نوجد الوزن الإحصائي لكل حالة على حدا ومنه نقوم بنسبتهما :

$$W_1(N_1,N_2,N_3)_{max} = N! \prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i} = N!\left[\frac{2^{N_1}}{N_1!}\cdot\frac{2^{N_2}}{N_2!}\cdot\frac{1^{N_3}}{N_3!}\right] \quad ①$$

$$W_2(N_1+1, N_2-2, N_3+1) = N! \prod_i \frac{g_i^{N_i}}{g_i} = N!\left[\frac{2^{N_1+1}}{(N_1+1)!}\cdot\frac{2^{N_2-2}}{(N_2-2)!}\cdot\frac{1^{(N_3+1)}}{(N_3+1)!}\right]$$

$$= N!\left[2\cdot\frac{2^{N_1}}{(N_1+1)N_1!}\cdot\frac{N_2(N_2-1)!\ 2^{N_2}}{4\ N_2!}\cdot\frac{1^{N_3}}{(N_3+1)N_3!}\right] \quad ②$$

والآن بقسمة ① على ② طرفا إلى طرف نجد أن :

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{(N_1+1)}{2}\cdot\frac{4}{N_2(N_2-1)}\cdot\frac{N_3+1}{1} \Rightarrow \frac{W_1}{W_2} = \frac{(698+1)}{2}\cdot\frac{4}{256(256-1)}\cdot\frac{(47+1)}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{W_1}{W_2} = 1.026 > 1 \Rightarrow \underbrace{W_1}_{max} > \underbrace{W_2}_{\text{الحالة الأخرى}}$$

وهو المطلوب

II. تطبيقات إحصاء ماكسويل - بولتزمان

• مقدمة :

يطبق إحصاء ماكسويل - بولتزمان على الغاز الكلاسيكي (اللاكمي غاز "M-B") ، الذي يختلف عن الغاز المثالي بـ (جسيماته المتمايزة وحجمها الخاص غير المهمل). وإذا غضضنا النظر عن الحجم الخاص غاية تجنبا وبتقريب معقول اعتبار الغاز المثالي غاز كلاسيكي ، تكون فيه سويات الطاقة متقاربة لدرجة يمكن اعتبارها مستمرة (بفاصل طاقي قدره $d\varepsilon$).

• تابع توزع الطاقة في إحصاء ماكسويل - بولتزمان :

- في الحالة المستمرة يعطى عدد الجسيمات $dN(\varepsilon)$ الموجودة في المجال الطاقي $d\varepsilon$ بالعلاقة :

$$dN(\varepsilon) = \frac{N}{Z} e^{\beta\varepsilon} g(\varepsilon)\, d\varepsilon \text{ ------ } (*)$$

وبما أن : $g(\varepsilon)\,d\varepsilon = \Gamma\, d\Gamma(\varepsilon) \Rightarrow g(\varepsilon)\,d\varepsilon = CV 2\pi (2m)^{3/2} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon$

وكذلك : $Z = CV(2\pi mKT)^{3/2}$ & $\beta = -1/KT$

وبالتعويض في العلاقة (*) نجد أنّ:

$$dN(\varepsilon) = \frac{N}{CV(2\pi mKT)^{3/2}} \cdot e^{-\varepsilon/KT} \cdot CV2\pi(2m)^{3/2}\varepsilon^{1/2}d\varepsilon = \frac{2N\varepsilon^{1/2}e^{-\varepsilon/KT}}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}}\cdot d\varepsilon$$

وبالقسمة على N نجد تابع ال[illegible] الطاقة :

$$\frac{dN(\varepsilon)}{N} = \frac{2\varepsilon^{1/2}e^{-\varepsilon/KT}}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}}d\varepsilon = f(\varepsilon)\,d\varepsilon \Longleftrightarrow \boxed{f(\varepsilon) = \frac{2\varepsilon^{1/2}e^{-\varepsilon/KT}}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}}}$$

تابع كثافة الطاقة لماكسويل بولتزمان

وهو تابع كثافة احتمالي لأنّ:

$$\int_0^\infty f(\varepsilon)\,d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}(KT)^{3/2}}\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{1/2}e^{-\varepsilon/KT}}{(\;)} \longrightarrow \text{نضع: } x = \frac{\varepsilon}{KT} \Rightarrow dx = \frac{d\varepsilon}{KT}$$

وحدود التكامل تبقى كما هي

$$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{\pi}(KT)^{3/2}}\cdot(KT)^{3/2}\underbrace{\int_0^\infty x^{1/2}e^{-x}dx}_{\Gamma(\frac{3}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1 \Longrightarrow \int_0^\infty f(\varepsilon)\,d\varepsilon = 1 \Leftrightarrow f(\varepsilon)$$

تابع كثافة احتمالي

- <u>تابع توزيع السرعة المطلقة في إحصاء ماكسويل بولتزمان :</u>

- نقصد بالسرعة المطلقة العبارة التالية:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

- في الحالة المستمرة نعطي عدد الجسيمات $dN(v)$ الموزعة في مجال السرعة $[v, v+dv]$ بالعلاقة :

$$dN(v) = \frac{N}{Z}e^{\beta m v^2/2}g(v)\,dv \;\ldots\ldots\ldots (*)'$$

لدينا : $g(v)dv = CV4\pi m^3 v^2 dv$ & $\beta = -1/KT$ & $Z = CV(2\pi mKT)^{3/2}$

- وبالتعويض في (*)' نجد أنّ:

$$dN(v) = \frac{N}{CV(2\pi mKT)^{3/2}}\cdot e^{-mv^2/2KT}\cdot CV4\pi m^3 v^2 dv$$

- والآن بالإختزال على CV واعتبار $\alpha = m/2KT$ نكتب :

$$dN(v) = 4\pi N\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}e^{-\alpha v^2}\cdot v^2 dv$$

- والآن بالقسمة على عدد الجسيمات N نجد تابع الكثافة بالشكل :

$$\frac{dN(v)}{N} = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}v^2 e^{-\alpha v^2}dv = f(v)\,dv \Longleftrightarrow \boxed{f(v) = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}v^2 e^{-\alpha v^2}}$$

تابع كثافة السرعة لماكسويل - بولتزمان

- وهو تابع كثافة احتمالي :

$$\int_0^\infty f(v)\,dv = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\underbrace{\int_0^\infty v^2 e^{-\alpha v^2}\,dv} = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} = 1$$

بواسون الثاني $I'_n = \dfrac{2!}{\frac{2}{2}!\,2^{2+1}}\sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha^{2+1}}}$

$$\Rightarrow \int_0^\infty f(v)\,dv = 1 \Rightarrow f(v) \text{ احتمالي}$$

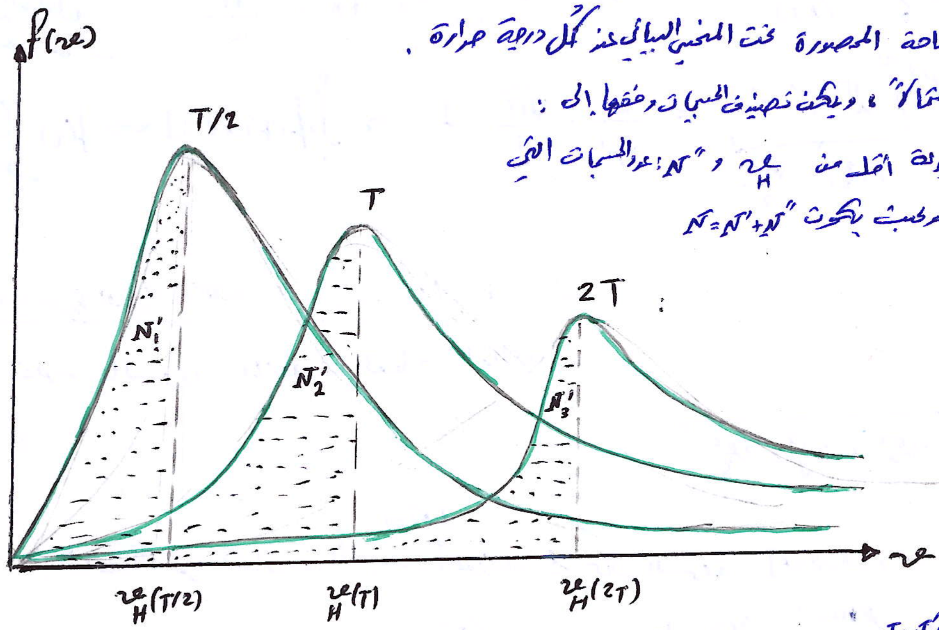
* **ملاحظة** :

يختلف تابع توزع (M-B) للسرعة المطلقة عن تابع كثافة غوص الطبيعي في الشكل ، حيث تابع غوص يأخذ الشكل : $f(v) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\, e^{-\alpha v^2}$

* **تغيير تابع كثافة (M-B) للسرعة المطلقة $f(v)$ عند درجات حرارة مختلفة :**

- يوضح الشكل تابع الكثافة عند ثلاث درجات حرارة مختلفة $(T/2)$ و (T) و $(2T)$.
- بما أن $N = cte$ فإذاً المساحة المحصورة تحت المنحني البياني عند كل درجة حرارة تمثل N .
- تعبر v_H عن السرعة الأكثر احتمالاً ، ويمكن تصنيف الجسيمات وفقها إلى :

N' : عدد الجسيمات التي تمتلك سرعة أقل من v_H و N'' : عدد الجسيمات التي تمتلك سرعة أكبر من v_H بحيث $N = N' + N''$



- **النتائج** :

① . بارتفاع درجة الحرارة تنزاح النهاية العظمى لمنحني الكثافة باتجاه تزايد السرعة المطلقة v .

② بارتفاع درجة الحرارة يزداد N'' على حساب N' بحيث يبقى $N = N' + N'' = cte$;

③ . بارتفاع درجة الحرارة تقل قيمة تابع الكثافة $f(v)$ ، مما يشير لانخفاض عدد الجسيمات التي تقع في مجال السرعة dv .

* **السرع المميزة لتوزع ماكسويل بولتزمان :**

① . **السرعة الأكثر احتمالاً v_H** : وهي السرعة الموافقة للنهاية العظمى لتابع الكثافة ، والتي يكون عندها : $\dfrac{\partial f(v)}{\partial v} = 0$

$$\frac{\partial f(v)}{\partial v} = 0 \Rightarrow 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\left[2v e^{-\alpha v^2} - 2\alpha v v^2 e^{-\alpha v^2}\right] = 0 \Rightarrow 2v e^{-\alpha v^2}(1-\alpha v^2) = 0$$

الحلول الناتجة :

عندما $2v e^{-\alpha v^2} = 0 \Rightarrow v = 0 \;\&\; v = \infty$ « غير مقبولة فيزيائياً »

وعندما : $1 - \alpha v^2 = 0 \Rightarrow v = 1/\sqrt{\alpha}$ و $\alpha = \dfrac{m}{2kT}$

$$= \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

• القيمة الوسطى للسرعة المطلقة :

$$\bar{v} = \frac{\int_0^\infty v f(v)\,dv}{\int_0^\infty f(v)\,dv} = \int_0^\infty f(v)\,dv \quad ; \quad \int_0^\infty f(v)\,dv = 1 \Rightarrow$$

$$\bar{v} = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\underbrace{\int_0^\infty v^3 e^{-\alpha v^2}\,dv}_{\substack{\text{بواسون الثاني} \\ 1/2\alpha^2}} = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\cdot\frac{1}{2\alpha^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}v_H \simeq 1{,}13\, v_H = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

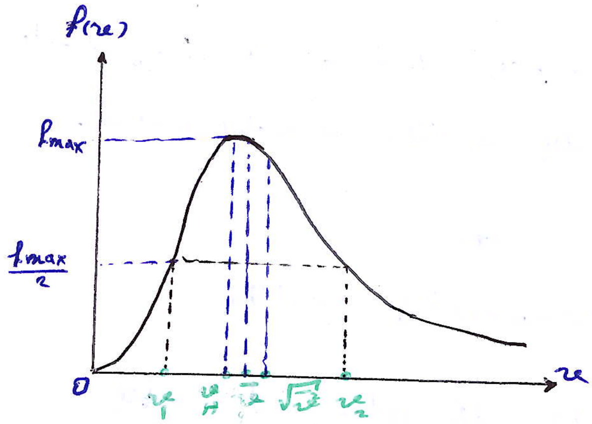
• القيمة الوسطى لمربع السرعة المطلقة :

$$\overline{v^2} = \int_0^\infty v^2 f(v)\,dv = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\underbrace{\int_0^\infty v^4 e^{-\alpha v^2}\,dv}_{\substack{\text{لبواسون الثاني} \\ \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}}} = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\cdot\frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}} = \frac{3}{2}\,\frac{1}{\alpha} = \frac{3}{2}v_H^2 = \frac{3kT}{m}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\,v_H \simeq 1{,}22\, v_H = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

• والرسم البياني التالي يوضح السرع المميزة :

ملاحظة : v_1 و v_2 هي القيم الموافقة ل $\frac{f_{max}}{2}$



• التشتت Δv^2 :

$$\overline{\Delta v^2} = \overline{v^2} - \bar{v}^2 = \frac{3}{2}v_H^2 - \frac{4}{\pi}v_H^2 = \left(\frac{3}{2}-\frac{4}{\pi}\right)v_H^2$$

$$\simeq 0.227\, v_H^2$$

* الطاقات المميزة لجسيمات الغاز الكلاسيكي (M-B) :

• الطاقة الأكثر احتمالاً

نفرض أن : الطاقة الاحتمالية هي طاقة حركية فقط (الجسيمات حرّة) أي : $\varepsilon = m v^2/2$.

لدينا : $v_H = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \Rightarrow \varepsilon_H = \frac{m}{2}\cdot\frac{2kT}{m} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_H = kT}$

- وهو ما يتفق مع النظرية الحركية في الغازات (الترموديناميك) ، حيث تعطى الطاقة الحركية بالعلاقة : $\boxed{\varepsilon_{Id} = \frac{f}{2}kT}$

- ومن أجل $f=2$ (درجتي حرية) نجد الطاقة الحركية الساعية (ε_K) وفقاً للنظرية الحركية للغازات توافق جسيم (أحادي الذرة) يتحرك حركة إنسحابية في المستوي .

• الطاقة الوسطى $\bar{\varepsilon}$:

$$\bar{\varepsilon} = \int_0^\infty \varepsilon f(\varepsilon)\,d\varepsilon \quad ; \quad f(\varepsilon) = \frac{2\,\varepsilon^{1/2}}{\sqrt{\pi}\,(kT)^{3/2}}\,e^{-\varepsilon/kT} \Rightarrow \bar{\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,(kT)^{3/2}}\int_0^\infty \varepsilon^{3/2}\,e^{-\varepsilon/kT}\,d\varepsilon$$

نفرض أن :

$x = \varepsilon / KT \Rightarrow dx = \frac{d\varepsilon}{KT}$ " حدود التكامل لا تتغير "

$$\Rightarrow \bar{\varepsilon} = \frac{2KT}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_0^{\infty} x^{3/2} e^{-x} dx}_{\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}} = \frac{2}{\cancel{\sqrt{\pi}}} \cdot KT \cdot \frac{3}{4}\cancel{\sqrt{\pi}} = \frac{3}{2} KT$$

- القيمة التربيعية للطاقة $\overline{\varepsilon^2}$:

$$\overline{\varepsilon^2} = \int_0^{\infty} \varepsilon^2 f(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}(KT)^{3/2}} \int_0^{\infty} \varepsilon^{5/2} e^{-\varepsilon/KT} d\varepsilon \quad ; \text{ نضع } : x = \varepsilon/KT \Rightarrow dx = \frac{d\varepsilon}{KT}$$

$$\Rightarrow \overline{\varepsilon^2} = \frac{2(KT)^2}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_0^{\infty} x^{5/2} e^{-x} dx}_{\Gamma(\frac{7}{2}) = \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{2}{\cancel{\sqrt{\pi}}} (KT)^2 \cdot \frac{15}{8}\cancel{\sqrt{\pi}} = \frac{15}{4}(KT)^2$$

- التشتت في الطاقة $\overline{\Delta\varepsilon^2}$:

$$\overline{\Delta\varepsilon^2} = \overline{\varepsilon^2} - \bar{\varepsilon}^2 = \frac{15}{4}(KT)^2 - \frac{9}{4}(KT)^2 = \frac{3}{2}(KT)^2$$

* تابع توزع مركبة السرعة المتعلقة $f(v_x)$ في إحصاء ماكسويل - بولتزمان :

- عدد الجسيمات الواقعة في مجال السرعة dv_x ، dv_y ، dv_z بالعلاقة :

$$dN(v_{x,y,z}) = \frac{N}{Z} e^{\beta m v^2/2} g(v_{x,y,z})\, dv_{x,y,z} \quad \text{.....}(*)$$

ولدينا : $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$ & $Z = CV(2\pi m KT)^{3/2}$ & $\beta = -1/KT$

ولدينا عنصر الحجم في فضاء الطور : $d\Gamma = dq_v \cdot dp_v = V\, dp_x \cdot dp_y \cdot dp_z$ & $dp_x = m\, dv_x$; $dp_y = m\, dv_y$; $dp_z = m\, dv_z$

$$\Rightarrow d\Gamma = V m^2 dv_x\, dv_y\, dv_z$$

ونعلم أن : $g(v)\, dv = C\, d\Gamma(v) \Rightarrow g(v)\, dv = CVm^3 dv_x\, dv_x\, dv_z$

بتعويض كل ما سبق في $(*)$ نجد أن :

$$dN(v_{x,y,z}) = \frac{N}{CV(2\pi m KT)^{3/2}} \cdot e^{-\frac{m}{2KT}(v_x^2+v_x^2+v_z^2)} \cdot CVm^3 dv_x \cdot dv_y \cdot dv_z$$

$$= N\left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{3/2} e^{-mv_x^2/2KT} dv_x \cdot e^{-mv_y^2/2KT} dv_y\, e^{-mv_z^2/2KT} \cdot dv_z$$

- والآن لمعرفة عدد الجسيمات المتحركة وفق الاتجاه ox فنأخذ مركبة السرعة المتعلقة بـ x دون تكامل ونكامل المركبات الأخرى على المجال $]-\infty, +\infty[$:

$$dN(v_x) = N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{m v_x^2}{2kT}} dv_x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-m v_y^2/2kT} dv_y \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-m v_z^2/2kT} dv_z$$

وبوضع $\alpha = \frac{m}{2kT} \Rightarrow dN(v_x) = N\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\kappa v_x^2} dv_x \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\kappa v_y^2} dv_y}_{\text{بواسون الأول}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\kappa v_z^2} dv_z}_{\text{بواسون الأول}}$ --- (**)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\kappa v_y^2} dv_y = \int_{-\infty}^{+\infty} v_y^0 e^{-\kappa v_y^2} dv_y = 2\int_0^{\infty} v_y^0 e^{-\kappa v_y^2} dv_y = 2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\kappa}} = \sqrt{\frac{\pi}{\kappa}}$$

وكذلك الأمر : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\kappa v_z^2} dv_z = \frac{\sqrt{\pi}}{\kappa}$

- وبالتعويض عن ذلك في (**) نجد أنه :

$$dN(v_x) = N\left(\frac{\kappa}{\pi}\right)^{3/2} \cdot \frac{\pi}{\kappa} \cdot e^{-\kappa v_x^2} dv_x = N\left(\frac{\kappa}{\pi}\right)^{1/2} e^{-\kappa v_x^2} dv_x$$

- ونحصل على تابع الكثافة بالتقسيم على عدد الجسيمات الكلي :

$$\frac{dN(v_x)}{N} = \sqrt{\frac{\kappa}{\pi}}\, e^{-\kappa v_x^2} dv_x = f(v_x)\, dv_x \Rightarrow \boxed{f(v_x) = \sqrt{\frac{\kappa}{\pi}}\, e^{-\kappa v_x^2}}$$

- وكما نلاحظ فإن $f(v_x)$ هو تابع لكثافة غوص الطبيعي .

- وهو احتمالي :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\kappa v_x^2} dx}_{\text{بواسون الأول}} = \sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} \cdot 2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\kappa}} = 1$$ وهو المطلوب

تمرين : أوجد قيم المقادير التالية :

$$\overline{v_x^2 \cdot v_y^2} \; ; \; \overline{(v_x + b v_y)^2} \; ; \; \overline{v_x^3 v_y} \; ; \; \overline{v^2 v_x} \; ; \; \overline{v_x^2} \; ; \; \overline{v_x}$$

الجواب :

• $\overline{v_x} = \int_{-\infty}^{+\infty} v_x f(v_x) dv_x = \sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} v_x e^{-\kappa v_x^2} dv_x}_{\text{فردي } n=1 \Rightarrow 0} = 0$

- وتشير هذه النتيجة إلى أن عدد الجسيمات المتحركة في الإتجاه ox^+ هو ذاته عدد الجسيمات المتحركة في الإتجاه ox^-

• $\overline{v_x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 f(v_x) dx = \sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 e^{-\kappa v_x^2} dv_x = 2\sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} \underbrace{\int_0^{+\infty} v_x^2 e^{-\kappa v_x^2} dv_x}_{\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\kappa^3}}}$

$$= 2\sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} \cdot \frac{1}{4} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\kappa^3}} = \frac{1}{2\kappa} = \frac{kT}{m}$$

- $\overline{v^2 \cdot v_x} = \overline{v^2} \cdot \overline{v_x} = 0$; $\overline{v_x} = 0$ و
- $\overline{v_x^3 \cdot v_y} = \overline{v_x^3} \cdot \overline{v_y} = 0$; $\overline{v_y} = 0$
- $\overline{(v_x + b v_y)^2} = \overline{v_x^2} + 2b\, \overline{v_x} \cdot \overline{v_y} + b^2 \overline{v_y^2} = \frac{1}{2\alpha} + 0 + b^2 \cdot \frac{1}{2\alpha} = (1+b^2)\frac{1}{2\alpha} = (1+b^2)\frac{KT}{m}$

$\overline{v_y} = \overline{v_x} = 0$ و ;

- $\overline{v_x^2 v_y^2} = \overline{v_x^2} \cdot \overline{v_y^2} = \frac{1}{2\alpha} \cdot \frac{1}{2\alpha} = \frac{1}{4\alpha^2} = \left(\frac{KT}{m}\right)^2$

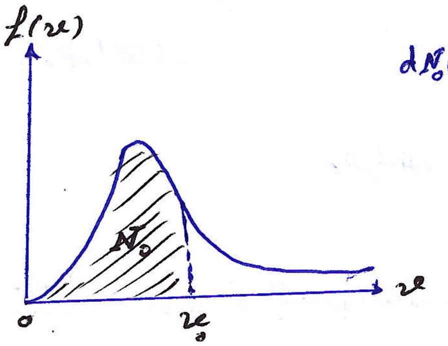
• تابع الخطأ :

يعطى تابع الخطأ وفق الصيغة التالية :

$$E_r(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx \quad \text{«Error function»}$$

• حساب عدد الجسيمات N_0 المتحركة في مجال محدد للسرعة المطلقة $(0 \to v_0)$:

* لدينا عدد الجسيمات $dN_0(v)$ الموزعة وفقاً لسرعها المطلقة في المجال $[v, v+dv]$ هو :



$$dN_0(v) = 4\pi N \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} v^2 e^{-\alpha v^2} dv \quad \ldots (*)$$

* ولإيجاد N_0 في المجال $[0, v_0]$ الموضحة بالشكل نكامل ضمن المجال المذكور

$$N_0 = \int_0^{v_0} dN_0(v) = 4\pi N \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \int_0^{v_0} v^2 e^{-\alpha v^2} dv$$

* والآن نفترض أن :

$$x^2 = \alpha v^2 \Rightarrow v = x/\sqrt{\alpha} \Rightarrow dv = dx/\sqrt{\alpha}$$

حدود التكامل : $v = 0 \Rightarrow x = 0$; $v = v_0 \Rightarrow x = \sqrt{\alpha}\, v_0$

وبالتعويض عن ذلك نجد :

$$N_0 = 4\pi N \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{3/2} \int_0^{\sqrt{\alpha} v_0} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} \int_0^x x^2 e^{-x} dx$$

ولكن $-\frac{x}{2} d(e^{-x^2}) = x^2 e^{-x^2} dx \Rightarrow N_0 = -\frac{2N}{\sqrt{\pi}} \int_0^x x\, d(e^{-x^2})$

نكامل بالتجزئة :

$$u = x \Rightarrow du = dx \quad ; \quad dv = d(e^{-x^2}) \Rightarrow v = e^{-x^2}$$

$$\Rightarrow N_0 = -\frac{2N}{\sqrt{\pi}}\left[x e^{-x^2} - \int_0^x e^{-x^2}\,dx\right] = N\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-x^2}dx - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,x e^{-x^2}\right]$$

وباستخدام عبارة تابع الخطأ نكتب :

$$\boxed{N_0 = N\left[E_r(x) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,x\,e^{-x^2}\right]} \quad (*)$$

تطبيق (1) :

اوجد عدد جسيمات الغاز الكلاسيكي التي تقع سرعها المطلقة في المجالات المعطاة بدلالة السرعة الأكثر احتمالاً v_H التالية : $N_0(0 \to v_0 = v_H)$ و $N_0(0 \to v = 0{,}8\,v_H)$.

علماً أنّ : $E_r(1) = 0{,}8427$ & $E_r(0{,}8) = 0{,}7421$

الجواب :

* نوجد قيمة الوسيط x :

$$x = \sqrt{K}\,v_0 = \sqrt{K}\,v_H = 1$$

فيكون : $N_0(0 \to v_H) = N\left[E_r(1) - \frac{2}{\sqrt{\pi}\,e}\right] = N[0{,}8427 - 0{,}4151] = 0.4276$

أي أنّ N_0 الواقعة في المجال $(0 \to v_H)$ هي شكل نسبة من المقدار الكلي N بالشكل :

$$N_0 = 42{,}76\,\%\,N$$

* نوجد قيمة الوسيط x :

$$x = \sqrt{K}\,v_0 = \sqrt{K}\,0.8\,v_H = 0{,}8$$

فيكون : $N_0(0 \to 0.8\,v_H) = N\left[E_r(0{,}8) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{0{,}8}{e^{(0{,}8)^2}}\right] = N[0{,}7421 - 0.476] = 0.2661\,N$

$$\Rightarrow N_0 = 26.61\,\%\,N$$

تطبيق (2):

تأكد من أنّ عدد جسيمات الغاز الكلاسيكي التي تقع سرعها المطلقة في المجال $N_0(0 \to v_0 = \infty)$ هو كامل عدد جسيمات الجملة (N) .

الجواب :

نوجد الوسيط x :

$$x = \sqrt{K}\,v_0 \Rightarrow x \to \infty$$

فيكون : $N_0(0 \to \infty) = N\left\{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-x^2}dx - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\underbrace{\left[x e^{-x^2}\right]_0^\infty}_{0}\right\} = \frac{2N}{\sqrt{\pi}}\underbrace{\int_0^\infty e^{-x^2}dx}_{\text{بواسون الثاني}}$

$$\Rightarrow N_0(0\to\infty) = \frac{2N}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = N$$ وهو المطلوب

تطبيق 3 :

اوجد عدد جسيمات الغاز الكلاسيكي التي تقع سرعها المطلقة في المجال ($v_H \to \infty$) N_0

الجواب :

نكتب المجال المطلوب بالشكل :

$$N_0(v_H\to\infty) = \underbrace{N_0(0\to\infty)}_{N} - N_0(0\to v_H) = N - 0.4276N = 0.5724N = 57.24\%\,N$$

تطبيق 4 :

اوجد عدد جسيمات الغاز الكلاسيكي التي تقع سرعها المطلقة في المجال ($v_H \to 1.6\,v_H$) N_0

علماً أن: $Er(1) = 0{,}8427$ & $Er(1.6) = 0.9763$

الجواب :

نكتب المجال المطلوب بالشكل :

$$N_0(v_H\to 1.6\,v_H) = N_0(0\to 1.6\,v_H) - N_0(0\to v_H)$$

* نوجد قيمة الوسيط x :

- $x = \kappa\sqrt{v_0} = \kappa\cdot 1.6\,v_H = 1.6 \Rightarrow N_0(0\to 1.6\,v_H) = N\left[Er(1.6) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1.6}{e^{(1.6)^2}}\right]$

$$\Rightarrow N_0(0\to 1.6\,v_H) = N[0.9763 - 0.1396] = 0.8367N = 83{,}67\%\,N$$

* نوجد قيمة الوسيط x من أجل المجال ($0 \to v_H$) ونجد أن :

$$N_0(0\to v_H) = 42{,}76\%\,N$$

ومنه يكون : $N_0(v_H\to 1.6\,v_H) = N_0(0\to 1.6\,v_H) - N_0(0\to v_H)$

$= 0.8367N - 0.4276N = 0.4091N = 40{,}91\%\,N$ وهو المطلوب

• إيجاد عدد الجسيمات المتحركة N_0 وفق أحد المحاور " ox مثلاً " في مجال محدد للسرعة $(0 \to v_0)$:

- لدينا عدد الجسيمات $dN_0(v_x)$ الموزعة تبعاً لمركبة السرعة وفق المحور ox في مجال السرعة $[v_x , v_x + dv_x]$ هو:

$$dN_0(v_x) = N_0 \sqrt{\frac{K}{\pi}}\, e^{-K v_x^2}\, dv_x$$

- ولإيجاد العدد الواقع في المجال $N_0(0 \to v_0)$ نكامل على المجال المذكور:

$$N_0(0 \to v_0) = N \sqrt{\frac{K}{\pi}} \int_0^{v_0} e^{-K v_x^2}\, dv_x$$

- نفرض الوسيط:

$$x^2 = K v_x^2 \Rightarrow x = \sqrt{K}\, v_x \Rightarrow v_x = x/\sqrt{K} \Rightarrow dv_x = dx/\sqrt{K}$$

وحدود التكامل: $v_x = 0 \Rightarrow x = 0$ & $v_x = v_0 \Rightarrow x = \sqrt{K}\, v_0$

- وبالتعويض نجد:

$$N_0(0 \to v_0) = N \sqrt{\frac{K}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{K}} \int_0^x e^{-x^2} dx = \frac{N}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx$$

وباستخدام عبارة تابع الخطأ نكتب:

$$\boxed{N_0(0 \to v_0) = \frac{N}{2}\, Er(x)}$$

تطبيقات:

تطبيق 1:

اوجد عدد جسيمات الغاز الكلاسيكي المتحركة وفق المحور ox والتي تقع سرعها في المجالات $N_0(0 \to v_0 = v_H)$ & $N_0(0 \to v_0 = 1.2\, v_H)$.

الأجوبة: $N_0(0 \to v_H) = 42.14\,\%\, N$ & $N_0(0 \to v_0 = 1.2\, v_H) = 45.51\,\%\, N$

تطبيق 2:

تأكد من أن عدد جسيمات الغاز الكلاسيكي المتحركة وفق المحور ox ضمن المجال $N_0(0 \to 1{,}2 v_H)$ هو نصف عدد جسيمات الجملة $(N/2)$ مع التعليل.

الجواب:

$$N_0(0 \to \infty) = \frac{N}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_0^\infty e^{-x^2} dx}_{\sqrt{\pi}/2} = \frac{N}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{N}{2}$$

بواسون الثاني

$$\frac{0!}{\frac{0}{2}!\; 2^{0+1}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{1}}$$

اما تعليل ذلك فيعود الى مبدأ تكافؤ الفرص

حيث يكون عدد الجسيمات المتحركة وفق الاتجاه الموجب ox^{+} مساوياً لعدد الجسيمات المتحركة وفق الاتجاه السالب للمحور ox.

تطبيق ③:

أوجد عدد جسيمات الغاز الكلاسيكي المتحركة وفق المحور ox، والتي تقع سرعها المطلقة في المجال $N_0(\frac{v}{H} \to \infty)$

الجواب:

نكتب المجال المطلوب بالشكل:

$$N_0(\tfrac{v}{H} \to \infty) = \underbrace{N_0(0 \to \infty)}_{N/2} - \underbrace{N_0(0 \to \tfrac{v}{H})}_{0.4214\,N} = 0.0786\,N = 7.86\,\%\,N$$

تطبيق ④:

أوجد عدد جسيمات الغاز الكلاسيكي المتحركة وفق المحور ox والتي تقع سرعها في مجال السرعة $N_0(\frac{v}{H} \to 1.6\frac{v}{H})$

الجواب: نكتب مجال السرعة بالشكل:

$$N_0(\tfrac{v}{H} \to 1.6\tfrac{v}{H}) = N_0(0 \to 1.6\tfrac{v}{H}) - N_0(0 \to \tfrac{v}{H}) = \frac{N}{2}\left[Er(1.6) - Er(1)\right]$$

$$= \frac{N}{2}\left[0.9763 - 0.8427\right] = 6.68\,\%\,N$$