كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : فيزياء للرياضيات

المحاضرة : الأولى والثانية /نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

المحاضرة الأولى ① / مقرر فيزياء للرياضيات

ت : 04/05/2025

الفصل الأول ① : اساسيات في الإحتمالات والإحصاء / الجزء ① /
اساسيات في الترموديناميك والفيزياء الإحصائية / الجزء ② /

①. بعض المفاهيم والقوانين الاساسية في نظرية الاحتمال

- **التجربة العشوائية** : هي كل تجربة لا يمكننا توقع نتيجتها مع علمنا المسبق بالنتائج الممكنة لها.
- **فضاء العينة S** : هي مجموعة النتائج الممكنة للتجربة العشوائية.
- **الحدث A** : هو مجموعة جزئية من فضاء العينة ، وقد يكون : بسيطاً أو مركباً أو مستحيلاً أو مؤكداً.

- الحدث البسيط: يحوي فقط على ناتج واحد من نواتج التجربة العشوائية « مجموعة جزئية من S تحوي عنصراً واحداً » ، ونعبر عن ذلك بـ : $N_A = 1$

- الحدث المركب : يحوي مجموعة على أكثر من ناتج من نواتج التجربة العشوائية ، ونعبر عن ذلك بـ : $N_A > 1$.

- الحدث المستحيل : ويكون مجموعة لا تمثل اي ناتج من نواتج S « مجموعة خالية ∅ من نواتج S »
ونعبر عن ذلك بـ : $N_A = 0$

- الحدث المؤكد : نواتجه هي ذاتها نواتج فضاء العينة S « مجموعة تحوي كل نواتج S » ونعبر عن ذلك :
$N_A = N_S$

- **الحدثان المتنافيان** : نقول عن الحدثين A و B انهما متنافيان إذا كان وقوع أحدهما ينفي وقوع الآخر « اي حدوث وقوعهما معاً يمثل حدثاً مستحيلاً » اثناء التجربة ، ونعبر عن ذلك :

« لا توجد منطقة مشتركة بين المجموعتين A و B من S » $A \cap B = \emptyset \Rightarrow n(A \cap B) = n(\emptyset) = 0$

- **الحدثان المستقلان** : نقول عن الحدثين A و B انهما مستقلان إذا كان وقوع أحدهما لا يؤثر على وقوع الآخر اثناء التجربة العشوائية . امثلة .

- **الحدثين المترابطين** / الحدث المشروط : حدثين مترابطين « هناك ارتباط بين حدوث الصداع إذا كان لديك مشاكل في الجيوب الأنفية »

A : حدث الصداع
B : حدث الجيوب الأنفية
} مترابطين ⟸ اصبح حدوث A مشروط بحدوث B جبراً « غير مستقل ».

رمز هذا الحدث : A/B

- مثال على حدثين مستقلين :

هل حدوث الصداع لديك مرتبط بحدوث الأمطار في غير دولتك ؟؟
بالطبع ليس هناك اي علاقة بين الحدثين .

• **الإحتمال** : هو قياس لإمكانية وقوع الحدث . فإذا كانت جميع نواتج التجربة المتشابهة لها فرصة الظهور نفسها ، فإن احتمال حدوث الحدث A نعبر عنه بالعلاقة :

$$P_A = \frac{\text{عدد نواتج الحدث } A}{\text{عدد نواتج فضاء العينة } \Omega} = \frac{N_A}{N_\Omega}$$

ويكون احتمال حدوث الحدث A محصوراً في النطاق بين 0 و 1 ، أي : $0 \leq P_A \leq 1$.

• **بعض القوانين الأساسية في الاحتمالات** :

• **قانون الجمع الاحتمالي** :

إذا كنا نبحث عن احتمال حدوث A أو B ، فإننا نعبر عن ذلك رياضياً بالعلاقة :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ولكن على فرض أن الأحداث مستقلة ومتنافية ، عندئذ : $P(A \cap B) = 0$ ، ونكتب :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

<u>وعموماً</u> : إذا كان لدينا مجموعة من الأحداث المستقلة والمتنافية مع بعضها البعض مثنى - مثنى ، فإن احتمال الإجتماع (الإتحاد) لها يساوي مجموع احتمالات الحدوث لكل حدث من الأحداث على حدا ، ونعبر عن ذلك رياضياً بالعلاقة :

$$P(\cup A_i) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_i) + \dots + P(A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

• **قانون الضرب الاحتمالي** :

إذا كنا نبحث عن احتمال حدوث A و B معاً ، فإننا نعبر عن ذلك رياضياً بالعلاقة :

$$P(A \cap B) = P(A/B) * P(B)$$
$$= P(B/A) * P(A)$$

ولكن على فرض أن الأحداث مستقلة عن بعضها البعض أي :

$$P(A/B) = P(A) \quad \& \quad P(B/A) = P(B) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

وعموماً : نكتب العلاقة التالية :

$$P(\cap A_i) = P(A_1) * P(A_2) \dots * P(A_i) * \dots * P(A_n) = \prod P(A_i)$$

- نفرض أنه لدينا تجربة عشوائية S ، ونريد معرفة عدد عناصرها فإنه نستخدم احد القوانين التالية وذلك تبعاً لظروف المسألة:

1. عدد طرق تباديل n عنصراً "متمايزاً" مأخوذاً منهم r عنصراً في كل مرة ، نستخدم العلاقة التالية:

قانون التباديل :

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)\,(n-r)!}{(n-r)!} = n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)$$

- وعند استخدام هذا القانون يكون هناك مراعاة للترتيب اثناء اجراء التجربة «قاعدة التباديل المرتبة»

2. عدد طرق تباديل n عنصراً "متمايزاً" مأخوذاً منهم r عنصراً في كل مرة ، نستخدم العلاقة التالية:

قانون التوافيق :

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{P_r^n}{r!}$$

- وعند استخدام هذا القانون لا يكون للترتيب اهمية اثناء اجراء التجربة. «قاعدة التباديل غير المرتبة»

3. إيجاد عدد طرق تباديل N عنصراً "موزعة مسبقاً" على m مجموعة بالشكل: «أصبحت المسألة مسألة أخذ مجموعات من العناصر $n_1 \to n_m$ بالتدريج من المجموعة الرئيسية N »

$$N = \sum_{i=1}^{m} n_i = n_1 + n_2 + \cdots + n_i + \cdots + n_{m-1} + n_m$$

الأمر وما فيه : في التباديل والتوافيق يأخذ لمرة واحدة من المجموعة الرئيسية ولكن هنا يأخذ m مرة منها»

نستخدم العلاقة التالية:

قاعدة التباديل ذات التوزع المسبق :

$$C^N_{n_1,n_2,\ldots,n_m} = \binom{N}{n_1!\,n_2!\cdots n_m!} = \frac{N!}{\prod_{i=1}^{m} n_i!} = \frac{N!}{n_1!\,n_2!\cdots\cdots n_m!}$$

البرهان على ذلك :

- عدد طرق اختيار المجموعة الأولى (المكونة من n_1 عنصر) من أصل m مجموعة:

$$w_1 = C^N_{n_1} = \binom{N}{n_1} = \frac{N!}{n_1!\,(N-n_1)!}$$

- عدد طرق اختيار المجموعة الثانية (المكونة من n_2 عنصر) من أصل $m-1$ مجموعة:

$$w_2 = C^{(N-n_1)}_{n_2} = \binom{N-n_1}{n_2} = \frac{(N-n_1)!}{n_2!\,(N-n_1-n_2)!}$$

- عدد طرق اختيار المجموعة الثالثة (المكونة من n_3 عنصر) من أصل $m-2$ مجموعة:

$$w_3 = C^{(N-n_2-n_3)}_{n_3} = \binom{N-n_1-n_2}{n_3} = \frac{(N-n_1-n_2)!}{n_3!\,(N-n_1-n_2-n_3)!}$$

- وهكذا يكون عدد طرق اختيار المجموعة الأخيرة المتبقية ذات الرقم m (والمكونة n_m عنصراً) هو:

$$w_m = C_{n_m}^{(N-n_1-n_2\cdots-n_{m-1})} = \binom{N-n_1-n_2\cdots-n_{m-1}}{n_m} = \frac{(N-n_1-n_2\cdots-n_{m-1})!}{n_m!(N-n_1-n_2\cdots-n_{m-1}-n_m)!} = \frac{n_m!}{n_m!} = 1$$

- بما أن طرق الاختيار لمجموعات العناصر مستقلة عن بعضها البعض ، يكون عدد طرق الاختيار الإجمالي:

$$w = w_1 . w_2 . w_3 \cdots w_m = \frac{N!}{n_1!\cancel{(N-n_1)!}} \cdot \frac{\cancel{(N-n_1)!}}{n_2!\cancel{(N-n_1-n_2)!}} \cdot \frac{\cancel{(N-n_1-n_2)!}}{n_3!\cancel{(N-n_1-n_2-n_3)!}} \cdots \frac{\cancel{n_m!}}{n_m!} = \frac{N!}{\prod_{i=1}^{m} n_m!}$$

II" بعض المفاهيم والقوانين الأساسية في الإحصاء

• **المتغير العشوائي** :

- هو دالة معرفة على فضاء العينة S ، ويرمز له بالرمز X عادة" ، حيث يرافق كل عنصر من S عدد حقيقي x من IR .

- في حالة X يأخذ قيم غير مستمرة « متقطعة » يكون لدينا متغير عشوائي متقطع ، وفي حالة أخذه لقيم مستمرة نسمي هذا بـ : المتغير العشوائي المستمر

- نعرف القيمة المتوسطة للمتغير العشوائي x بالعلاقة :

$$\bar{x} = \frac{\int_x x\,w(x)\,dx}{\int_x w(x)\,dx} \quad \text{« حالة التوزع المستمر »} \quad ; \quad \bar{x} = \frac{\sum_x x\,w(x)}{\sum w(x)} \quad \text{« حالة التوزع المنفصل »}$$

حيث : $w(x)$ تابع كثافة التوزع للمتغير العشوائي .

- الانحراف المعياري :

$$\overline{x^2} = \frac{\int_x x^2\,w(x)\,dx}{\int_x w(x)\,dx} \quad \text{« } x \text{ مستمر »} \quad ; \quad \overline{x^2} = \frac{\sum_x x^2\,w(x)}{\sum_x w(x)} \quad \text{« } x \text{ متقطع »}$$

- التشتت :

$$\overline{\Delta x^2} = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

II. دراسة لبعض التوزيعات الاحتمالية

☒ **مقدمة :**

المتغير العشوائي x

[يأخذ قيم منفصلة] متقطع (منفصل)

ندرس توزيعه الاحتمالي بواسطة تابع الكتلة الاحتمالي (PMF) : $w(x)$

احتمالي ⟸ تحقق الشرط الواحدي، أي :

تابع التوزيع : $W(x)$ ؛ $W(x)=\sum_x w(x)=1$

أمثلة على توزيعات احتمالية منفصلة : برنولي & بواسون

سوف نقوم بحساب بعض المقادير الإحصائية للمتغير العشوائي الذي يوصف بهكذا توزيعات احتمالية من العلاقات :

(*)

(المتوسط) $\bar{x}=\sum_x x\, w(x)$

(الانحراف المعياري) $\overline{x^2}=\sum_x x^2 w(x)$

(التشتت) $\overline{\Delta x^2}=\overline{x^2}-\bar{x}^2$

[يأخذ قيم مستمرة] مستمر

ندرس توزيعه الاحتمالي بواسطة تابع الكثافة الاحتمالي (PDF) : $f(x)$

احتمالي ⟸ تحقق الشرط الواحدي، أي :

تابع التوزيع : $F(x)$ ؛ $F(x)=\int_x f(x)\,dx=1$

أمثلة على توزيعات احتمالية مستمرة : غوص الطبيعي (التوزيع الجرسي)

سوف نقوم بحساب بعض المقادير الإحصائية للمتغير العشوائي الذي يوصف بهكذا توزيعات احتمالية من العلاقات :

(**)

(المتوسط) $\bar{x}=\int_x x f(x)\,dx$

(الانحراف المعياري) $\overline{x^2}=\int_x x^2 f(x)\,dx$

(التشتت) $\overline{\Delta x^2}=\overline{x^2}-\bar{x}^2$

☒ **توزع برنولي المنفصل :**

• لدينا تابع كثافة (كتلة) برنولي : $w(n)=\binom{N}{n}p^n q^{N-n}$; $n\le N$

حيث أن :

$p\le 1$ هو احتمال ظهور الحادثة n مرة من أصل N مرة

$q=1-p$; $q\le 1$ هو احتمال عدم ظهور الحادثة $(N-n)$ مرة من أصل N مرة

$$\binom{N}{n}=\frac{N!}{n!\,(N-n)!}$$

• وهو تابع كثافة احتمالي :

تابع التوزيع : $W(n)$ ؛ $W(n)=\underbrace{\sum_{n=0}^{N}\binom{N}{n}p^n q^{N-n}=(p+q)^N}_{\text{القاعدة التي نشر وفقها منشور ثنائي حد نيوتن لـ } q \text{ و } p}=\underbrace{(p+1-p)^N}=1$

• إيجاد $\bar{n}$ [المتوسط الحسابي] :

- لدينا من تعريف القيمة الوسطى :

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{N} n \binom{N}{n} p^{n} q^{N-n}$$

ومن أجل الوصول للقيمة الوسطى نأخذ تابع التوزع :

$$W(n) = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} p^{n} q^{N-n} = (p+q)^{N}$$

ومن ثم نشتق طرفي تابع التوزع مرة واحدة بالنسبة لـ p ومن ثم نضرب الطرفين بـ p :

الاشتقاق مرة واحدة :
$$\sum_{n=0}^{N} n \binom{N}{n} p^{n-1} q^{N-n} = N(p+q)^{N-1} \xRightarrow{*p} \underbrace{\sum_{n=0}^{N} n \binom{N}{n} p^{n} q^{N-n}}_{\bar{n}} = Np(p+q)^{N-1}$$

إذن : $\bar{n} = Np(p+q)^{N-1} = Np\underbrace{(p+1-p)}_{1}^{N-1} = Np \Rightarrow \boxed{\bar{n} = Np}$ (I)

• إيجاد $\overline{n^2}$ [الانحراف المعياري] :

- لدينا من تعريف الانحراف المعياري :

$$\overline{n^2} = \sum_{n=0}^{N} n^2 \binom{N}{n} p^{n} q^{N-n}$$

- ومن أجل الوصول للانحراف المعياري نأخذ تابع التوزع مرة أخرى :

$$W(n) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{N}{n} p^{n} q^{N-n} = (p+q)^{N}$$

ومن ثم نشتق مرتين بالنسبة لـ p وفي كل مرة بعد أن نشتق نضرب الطرفين بـ p :

الاشتقاق للمرة الأولى مع الضرب بـ p :
$$\sum_{n=0}^{N} n \binom{N}{n} p^{n-1} q^{N-n} = N(p+q)^{N-1} \xRightarrow{*p} \sum_{n=0}^{N} n \binom{N}{n} p^{n} q^{N-n} = Np(p+q)^{N-1}$$

الاشتقاق للمرة الثانية مع الضرب بـ p :
$$\sum_{n=0}^{N} n^2 \binom{N}{n} p^{n-1} q^{N-n} = N(p+q)^{N-1} + N(N-1)p(p+q)^{N-2}$$

$$\xRightarrow{*p} \underbrace{n^2 \binom{N}{n} p^{n} q^{N-n}}_{\overline{n^2}} = Np(p+q)^{N-1} + N(N-1)p^2(p+q)^{N-2}$$

$$\Longrightarrow \overline{n^2} = Np(p+q)^{N-1} + N(N-1)p^2(p+q)^{N-2} = Np\underbrace{(p+1-p)}_{1}^{N-1} + N(N-1)p^2\underbrace{(p+1-p)}_{1}^{N-2} = Np + N(N-1)p^2$$

$$\Longrightarrow \boxed{\overline{n^2} = Np + N^2p^2 - Np^2} \quad \text{(II)}$$

• إيجاد $\overline{\Delta n^2}$ [التشتت] :

- لدينا من تعريف التشتت :

$$\overline{\Delta n^2} = \overline{n^2} - \bar{n}^2 = Np + \cancel{N^2p^2} - Np^2 - \cancel{N^2p^2} = Np - Np^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{\Delta n^2} = Np - Np^2 = Np(1-p) = Npq = \bar{n}q} \quad \text{(III)}$$

سؤال (1) :

اكتب تابع كثافة برنولي وعرف مضمونه ، ثم برهن أنه تابع كثافة احتمال ، ثم استنتج قيم المقادير الإحصائية :
$\bar{n}$ ، $\overline{n^2}$ ، $\overline{\Delta n^2}$.

☒ توزع بواسون المنفصل :

• لدينا تابع كثافة (كتلة) بواسون :
$$\omega(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{a^x}{x!} e^{-a} \; ; \; 0 < x < \infty$$

• وهو تابع كثافة احتمالية :

تابع التوزع

$$W(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{a^x}{x!} e^{-a} = e^{-a} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{a^x}{x!} = e^{-a} \cdot e^{a} = 1$$

حيث : $e^{a} = 1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \dots + \frac{a^x}{x!} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{a^x}{x!}$

• إيجاد [القيمة الوسطى] $\bar{X}$:

- لدينا من تعريف القيمة الوسطى :

$$\bar{X} = \sum_{x=0}^{\infty} x\, w(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \frac{a^x}{x!} e^{-a} = 0 + \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \frac{a^x}{x!} e^{-a}$$

$$= e^{-a} \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \frac{a^x}{x!} = e^{-a} \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \frac{a\, a^{x-1}}{x(x-1)!} = a e^{-a} \underbrace{\sum_{x=1} \frac{a^{x-1}}{(x-1)!}}_{e^{+a}} = a e^{-a} e^{+a} = a \Longrightarrow \boxed{\bar{X} = a} \quad (I)$$

• إيجاد $\overline{X^2}$ [الانحراف المعياري] :

- لدينا من تعريف الانحراف المعياري :

$$\overline{X^2} = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 w(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \frac{a^x}{x!} e^{-a} = 0 + \sum_{x=1}^{\infty} x^2 \frac{a^x}{x!} e^{-a}$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} x^2 \frac{a^x}{x(x-1)!} e^{-a} = e^{-a} \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{a^x}{(x-1)!}$$

- والآن : نضيف ونطرح المجموع $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{a^x}{(x-1)!}$ كالتالي :

$$\overline{X^2} = e^{-a} \Big\{ \underbrace{\sum_{x=1}^{\infty} x \frac{a^x}{(x-1)!} - \sum_{x=1}^{\infty} \frac{a^x}{(x-1)!}}_{\sum_{x=1}^{\infty} (x-1) \frac{a^x}{(x-1)!}} + \sum_{x=1}^{\infty} \frac{a^x}{(x-1)!} \Big\}$$

$$\Longrightarrow \overline{X^2} = e^{-a} \Big\{ \sum_{x=1}^{\infty} (x-1) \frac{a^x}{(x-1)!} + \sum_{x=1}^{\infty} \frac{a^x}{(x-1)!} \Big\} = e^{-a} \Big\{ 0 + \sum_{x=2}^{\infty} (x-1) \frac{a^x}{(x-1)!} + \sum_{x=1}^{\infty} \frac{a^x}{(x-1)!} \Big\}$$

$$= e^{-a} \Big\{ \sum_{x=2}^{\infty} (x-1) \frac{a^2 \cdot a^{x-2}}{(x-1)(x-2)!} + \sum_{x=1}^{\infty} \frac{a\, a^{x-1}}{(x-1)!} \Big\} = e^{-a} \Big\{ a^2 \cdot \underbrace{\sum_{x=2}^{\infty} \frac{a^{x-2}}{(x-2)!}}_{e^{+a}} + a \underbrace{\sum_{x=1} \frac{a^{x-1}}{(x-1)!}}_{e^{+a}} \Big\}$$

$$= e^{-a} \{ a^2 e^{+a} + a e^{+a} \} \Longrightarrow \boxed{\overline{X^2} = a^2 + a} \quad (II)$$

• إيجاد $\overline{\Delta X^2}$ [التشتت] :

- لدينا من تعريف التشتت :

$$\overline{\Delta X^2} = \overline{X^2} - \bar{X}^2 = a^2 + a - a^2 \Longrightarrow \boxed{\overline{\Delta X^2} = a} \quad (III)$$

* ملاحظة (1) : دوماً في بواسون يتم السعي ... إلى المجموع الذي يعطينا التابع e^{+a} ، ومن أجل ذلك لابد من القيام ببعض العمليات الرياضية البسيطة للوصول إلى المراد .

سؤال (2) :

أكتب تابع كثافة بواسون ثم اثبت أنه تابع كثافة احتمالية ، ثم استنتج المقادير الإحصائية : $\bar{X}$ ، $\overline{X^2}$ و $\overline{\Delta X^2}$.

* ملاحظة 2 : **تكاملات بواسون**

تكامل بواسون الأول : $I'_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx = \begin{cases} 0 \; ; \; n \text{ فردي } \& \; n>0 \\ 2 I_n \; ; \; n \text{ زوجي } \& \; n \geq 0 \end{cases}$

الفرق يكمن في حدود التكامل

تكامل بواسون الثاني : $I_n = \int_{0}^{+\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx = \begin{cases} \dfrac{n!}{\frac{n}{2}!\, 2^{n+1}} \cdot \sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha^{n+1}}} \; ; \; n \text{ زوجي } \& \; n \geq 0 \\ \dfrac{m!}{2\alpha^{m+1}} \; ; \; n \text{ فردي } \& \; n>0 \; \& \; n = 2m+1 \; \& \; m \geq 0 \end{cases}$

☒ **توزع غوص الطبيعي المتصل :**

● لدينا تابع كثافة غوص بالشكل :

$$f(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\, e^{-\alpha x^2} \; ; \; -\infty < x < +\infty$$

● وهو تابع كثافة احتمالية لأنه :

تابع التوزع

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\, e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x^0 e^{-\alpha x^2} dx}_{\text{بواسون الأول} = 2I_n \; (\text{2 من بواسون الثاني})} \; ; \; n=0 \; (\text{زوجي})$$

$$= 2\sqrt{\alpha} \int_{0}^{+\infty} x^0 e^{-\alpha x^2} dx = 2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\; \frac{0!}{\frac{0}{2}!\, 2^{0+1}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{0+1}}} = 2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = 1$$

● إيجاد [القيمة الوسطى] $\bar{x}$:

- لدينا من تعريف القيمة الوسطى :

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\, e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x\, e^{-\alpha x^2} dx}_{\text{بواسون الأول} = 0} = 0 \; ; \; n=1 \; (\text{فردي})$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{x} = 0} \quad \text{I}$$

● إيجاد [الانحراف المعياري] $\overline{x^2}$:

- لدينا من تعريف الانحراف المعياري :

$$\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\, e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx}_{\text{بواسون الأول} = 2I_n \; (\text{2 من بواسون الثاني})} \; ; \; n=2 \; (\text{زوجي})$$

$$\Rightarrow \overline{x^2} = 2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \underbrace{\int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx}_{\text{بواسون الثاني}} \; ; \; n=2 \; (\text{زوجي}) \Rightarrow \overline{x^2} = 2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \cdot \frac{2!}{\frac{2}{2}!\, 2^{2+1}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{2+1}}} = 2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{x^2} = \frac{1}{2\alpha}} \quad \text{II}$$

● إيجاد [التشتت] $\overline{\Delta x^2}$:

- لدينا من تعريف التشتت :

$$\overline{\Delta x^2} = \overline{x^2} - \bar{x}^2 \Rightarrow \overline{\Delta x^2} = \frac{1}{2\alpha} - 0 \Rightarrow \boxed{\overline{\Delta x^2} = \frac{1}{2\alpha}} \quad \text{III}$$

سؤال 3 : اكتب تابع كثافة غوص ثم أثبت أنه احتمالي ، ثم أوجد : $\bar{x}, \overline{x^2}, \overline{\Delta x^2}$

* ملاحظة 3 :

تقريب تابع اللوغاريتم بجوار الواحد يكون بالشكل : $\ln(1 \pm x) \simeq \pm x \; ; \; x \ll 1$

☒ **إيجاد تابع كثافة بواسون انطلاقاً من تابع كثافة برنولي :**

- لدينا تابع كثافة برنولي بالشكل :

$$w(n) = \binom{N}{n} p^n q^{N-n} \; ; \; n \leq N$$

- نفرض التالي : $n \ll N$ الموافق لـ $p \ll 1$

- لنوجد القيمة التقريبية للتوافيق والمقدار q^{N-n} بناءً على هذا الفرض :

$$\bullet\ \binom{N}{n} = \frac{N!}{n!\,(N-n)!} = \frac{N(N-1)(N-2)\cdots(N-n)!}{n!\,(N-n)!} = \frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{n!} \simeq \frac{N^n}{n!}$$

حيث أن : $N(N-1)(N-2)\cdots(N-n+1) \simeq \underbrace{N.N.N\cdots N}_{N \text{ مضروب } n \text{ مرة بنفسه}} = N^n$ ؛ $N >> n$

$$\bullet\ q^{N-n} \Rightarrow \ln q^{N-n} = (N-n)\ln q = (N-n)\ln(1-p) \simeq -Np \Rightarrow \ln q^{N-n} \simeq -Np \Rightarrow q^{N-n} \simeq e^{-Np}$$

حيث أن : $(N-n) \simeq N$ ؛ $N >> n$ & $\ln(1-p) \simeq -p$ ؛ $p << 1$ [تقريب بجوار الواحد]

- وبالتعويض ما حصلنا عليه من تقريبات في تابع كثافة برنولي :

$$w(n) \simeq \frac{N^n}{n!} p^n (e^{-Np}) = \frac{(Np)^n}{n!} e^{-Np} \Rightarrow \boxed{w(n) \simeq \frac{a^n}{n!} e^{-a}} \ ; \ 0 \leq n < \infty \ \& \ a = Np$$

هذه العلاقة الأخيرة تابع كثافة بواسون ، وهو المطلوب

سؤال (4) :

استنتج باستخدام التقريبات المناسبة تابع كثافة بواسون انطلاقاً من تابع كثافة برنولي .

* ملاحظة (4) :

تقريب ستيرلنغ الأول : $\ln X! \simeq X\ln X - X$ ؛ $X >> 1$

تقريب ستيرلنغ الثاني : $\ln X! \simeq X \ln X$ ؛ $X >>> 1$

☒ إيجاد تابع كثافة غوص الطبيعي انطلاقاً من تابع كثافة بواسون :

- لدينا تابع كثافة بواسون بالشكل

$$w(x) = \frac{a^x}{x!} e^{-a} \ ; \ 0 \leq x < \infty$$

- نأخذ لوغارتم تابع كثافة بواسون ومن ثم ننشره بجوار القيمة الوسطى $x = a$ ونكتفي بالحدود الثلاثة الأولى :

$$\ln w(x) = \ln(w(x))\Big|_{x=a} + \frac{(x-a)}{1!}\frac{d\ln w(x)}{dx}\Big|_{x=a} + \frac{(x-a)^2}{2!}\frac{d^2\ln w(x)}{dx^2}\Big|_{x=a} + \cdots$$

- لنوجد $\ln w(x)$ ومشتقاته عند $x = a$ ونعوضها في المنشور

$$\bullet\ \ln w(x) = \ln(a^x) + \ln(e^{-a}) - \ln x! = x\ln a - a - \underbrace{\ln x!}_{\text{نستخدم عليه ستيرلنغ الأول}}$$

نستخدم ستيرلنغ الأول : $\ln w(x) \simeq x\ln a - a - x\ln x + x$

$$\bullet\ \frac{d\ln w(x)}{dx} \simeq \ln a - \ln x - 1 + 1 \Rightarrow \frac{d\ln w(x)}{dx}\Big|_{x=a} = \ln a - \ln a = 0$$

$$\bullet\ \frac{d^2\ln w(x)}{dx^2} \simeq \frac{d}{dx}\left[\ln a - \ln x\right] = -\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{d^2\ln w(x)}{dx^2}\Big|_{x=a} \simeq -\frac{1}{a}$$

$$\bullet\ \ln w(x)\Big|_{x=a} = \ln w(a)$$

$$\Rightarrow \ln w(x) \simeq \ln w(a) + 0 + \frac{(x-a)^2}{2!}\left(-\frac{1}{a}\right) = \ln w(a) - \frac{\Delta x^2}{2a} \Rightarrow \ln w(x) \simeq \ln w(a) - \frac{\Delta x^2}{2a} \ ; \ \Delta x^2 = (x-a)^2$$

$$\Rightarrow \ln\frac{w(x)}{w(a)} \simeq -\frac{\Delta x^2}{2a} \Rightarrow w(x) \simeq w(a)\, e^{-\frac{\Delta x^2}{2a}}$$ [وهذا يطابق تابع كثافة غوص الطبيعي $f(x) = A e^{-Kx^2}$ ؛ $-\infty < x < +\infty$ وهو المطلوب]

سؤال (5) : استنتج باستخدام التقريبات المناسبة تابع كثافة غوص الطبيعي انطلاقاً من تابع كثافة بواسون .

المحاضرة الثانية / مقرر فيزياء للرياضيات

ت: 11/05/2025

ت: 18/05/2025

الفصل الأول ①: اساسيات في الإحتمال والإحصاء / الجزء ① /

اساسيات في الترموديناميك والفيزياء الإحصائية / الجزء ② /

I. بعض المفاهيم والقوانين الأساسية في الترموديناميك

- **الترموديناميك**: علم تحولات الطاقة:

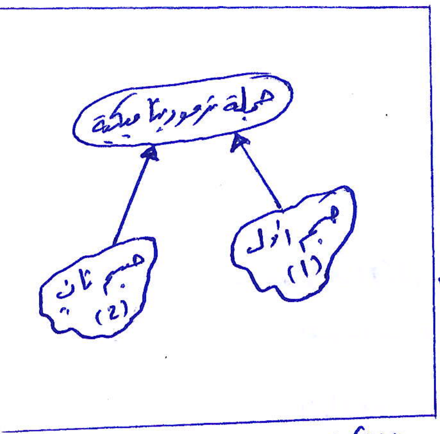
طاقة ⟷ عمل ⟷ إنتقال حراري

- **مقياس الدراسة في الترموديناميك**:

- مقياس الدراسة في الترموديناميك هو المقياس الجهري، ويتعلق هذا المقياس بالمجال الملاحظ تجريبيا (أي هو علم تجريبي). نتعرف على سبيل المثال حالة غاز بكميات قابلة للقياس تجريبيا" وهي درجة الحرارة والضغط والحجم وكمية المادة (T, P, V, n).

- **النظام الترموديناميكي**:

- النظام system أو الجملة هي جسم أو مجموعة اجسام تحتل حيزا" محددا" من الفضاء، وتوصف الجملة بأنها ترموديناميكية: إذا اقتضت دراستها إستخدام متحول مرتبط بدرجة الحرارة أو بالطاقة الداخلية للجملة.



«الكون».

- يمكن للجملة الترموديناميكية أن تتفاعل «تحدث « Interaction » مع أجسام أخرى. هنا الأجسام (1) و (2) ، لها الطاقة على شكل: عمل: ميكانيكي، كهربائي، مغناطيسي، كيميائي، ...... ، أو حرارة.

- وتُشكل هذه الأجسام (1) و (2) هنا في هذه الدراسة الوسط الخارجي للجملة الترموديناميكية.

- وتشكل المجموعة « الجملة الترموديناميكية + اجسام متفاعلة معها + الفراغ» ما نسميه بـ الكون.

- **أنواع النظام الترموديناميكي**:

①. **الجملة المعزولة**: تكون الجملة الترموديناميكية « معزولة » عندما لا تتبادل مع الوسط الخارجي مادة أو طاقة.

$E, T \;\not\longleftrightarrow\;$ جملة ترموديناميكية معزولة $\;\not\longleftrightarrow\; n$

②. **الجملة الترموديناميكية المغلقة**: لا تتبادل الجملة « المغلقة » مع الوسط الخارجي سوى الطاقة فقط:

$$E \longleftrightarrow \boxed{\text{جملة ترموديناميكية مغلقة}} \not\longleftrightarrow n$$

③. **الجملة الترموديناميكية المفتوحة**: تتبادل الجملة « المفتوحة » مع الوسط الخارجي الطاقة والمادة « المتميزة بـ عدد المولات »

$$E \longleftrightarrow \boxed{\text{جملة ترموديناميكية مفتوحة}} \longleftrightarrow n$$

• **متغيرات الحالة، المتحولات الشمولية واللاشمولية**:

- مصطلح: يسمى المتغير بـ متغير الحالة (أو تابع حالة) للجملة الترموديناميكية: إذا كان لا يعتمد على الحالة السابقة للنظام ويعتمد فقط «الحالة الابتدائية والنهائية».

- فمثلاً:

الطاقة الداخلية: ليكن لدينا جملة ترموديناميكية (غاز في وعاء مغلق، سائل في وعاء، جسم صلب) مكونة من N جسيم (ذرة، جزيء، شاردة، ....). فإن الطاقة الداخلية لجملة ترموديناميكية هي الطاقة الميكانيكية (حركية + كامنة) للجملة المقاسة أي جملة عطالة $\mathcal{R}$ تكون بالنسبة إليها الجملة الترموديناميكية في حالة سكون:

$$U = \sum_{i=1}^{N} E_{c_i}^{micro} + E_{p,int}^{micro}$$

- يعبر الحد الأول عن العشوائية الحرارية، أي مجموع الطاقات الحركية المجهرية لجميع الجسيمات (ذرات، جزيئات، ....) المكونة للجملة الترموديناميكية.

- والحد الثاني يعبر عن الطاقة الكامنة الداخلية للجملة للتأثيرات المتبادلة بين جميع الجسيمات.

• **الطاقة الداخلية تابع حالة**:

وهذا يعني أنه من أجل تحول عام بين حالة بدائية (Initial State) وحالة نهائية (final state) لا يتبع تغير الطاقة الداخلية للمسار المتبع من قبل الجملة من أجل الذهاب من (I.S) إلى (F.S) ولكن يتبع فقط للحالة البدائية والنهائية:

$$\underset{U_i}{(I.S)} \xrightarrow[\Delta U = U_f - U_i]{\text{تحول عام}} \underset{U_f}{(F.S)}$$

أي فقط لقيمة الطاقة الداخلية في الحالة البدائية وقيمة الطاقة الداخلية عند الحالة النهائية:

$$\boxed{\Delta U = U_f - U_i}$$

• نص المبدأ الأول في الترموديناميك :

- ليكن لدينا جملة ترموديناميكية مغلقة ومساكنة بالنسبة لجملة عطالة المخبر IR . تخضع هذه الجملة لتحول عام تتغير من خلاله طاقتها الداخلية بالكمية $\Delta U = U_f - U_i$:

$$(I.S) \xrightarrow[\Delta U = U_f - U_i]{\text{تحول عام}} (F.S)$$

- يعزى التغير في ΔU لمساهمتين :

ⓐ- مساهمة عمل القوى W المطبقة على الجملة (قوى الضغط مثلا).

ⓑ- مساهمة الإنتقالات الحرارية Q (كميات الحرارة) التي تستقبلها او تخسرها الجملة.

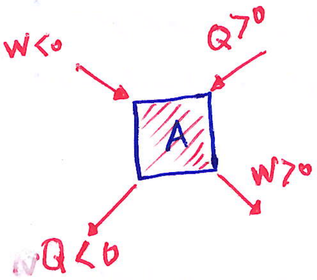
- يعتبر المبدأ الأول في الترموديناميك مبدأ «إنحفاظ طاقة» ونكتب إذن :

$$(I.S), U_i \xrightarrow[W,\ Q]{\text{تحول عام}} (F.S), U_f$$

$$\boxed{\Delta U = U_f - U_i = W + Q}$$

- ومن أجل تحول عنصري (تفاضلي) عكوس وشبه سكوني نكتب :

$$\boxed{dU = \delta W + \delta Q}$$



- إذن كما نرى من المبدأ الأول أن مقدار التغير في الطاقة الداخلية لمنظومة يساوي مجموع ما تتبادله هذه المنظومة مع الوسط الخارجي من حرارة وعمل.

• نص المبدأ الصفري في الترموديناميك :

- ويعني ان الجمل الواقعة في حالة توازن حراري مع بعضها (لها نفس درجة الحرارة ومن ثم نفس الطاقة الحركية)

- فإذا كان لدينا ثلاث جمل ، حيث : A و C في حالة اتزان حراري
B و C في حالة اتزان حراري ⟵ A و B في حالة اتزان حراري.

• نص المبدأ الثاني في الترموديناميك :

- مقدار تزايد انتروبية جملة مغلقة يفوق مقدار الطاقة الحرارية المخصصة لوحدة درجة حرارة واحدة.
أي أن انتروبية الجملة المعزولة في حالة تزايد مستمر:

صيغة كلاوزيوس $\boxed{dS \geq \frac{\delta Q}{T} > 0}$

- توصف الجملة الترموديناميكية بمجموعة من متحولات الحالة، وهي متحولات جهرية (على المستوى العيني)، وتُميّز هذه المتحولات حالة التوازن للجملة الترموديناميكية. حيث نعرف حالة التوازن بأنها: الحالة التي تبقى فيها المتحولات الجهرية للنظام الترموديناميكي ثابتة بمرور الزمن، وعندما يكون أحد هذه المتحولات في حالة تغير تكون الجملة في حالة عدم توازن.

- أمثلة: * يتميز سلك من النحاس (يوصف) بـ طوله L، ودرجة حرارته T، والتوتر المطبق عليه.

* تميز غاز بمتحولات الحالة الجهرية: T, P, V, n

- المتحول السعوي: هو كمية فيزيائية تتغير عند مضاعفة قياس (حجم الجملة). أمثلة مثل T, P, n

- المتحول اللاسعوي: هو كمية فيزيائية تبقى ثابتة أو غير متغيرة عند مضاعفة القياس (حجم الجملة).

أمثلة: U, n, V, S

ف الكميات السعوية هي تجميعية بينما اللاسعوية تكون غير تجميعية. ف درجة حرارة المنزل لا تساوي مجموع درجات حرارة كل غرفة من غرف المنزل.

• تحولات الجملة الترموديناميكية

• لا يهتم علم الترموديناميك إلا بـ «حالات التوازن للجملة الترموديناميكية».

• يسمح الترموديناميك بالحصول على «محصلات» طاقة أو غيرها بين حالة توازن نهائية وحالة توازن بدائية.

• يمكن الانتقال بين الحالة البدائية (I.S) والحالة النهائية (F.S) إما من خلال تحول عكوس أو تحول لاعكوس:

$$\underset{(I.S)}{\text{حالة بدائية}} \xrightarrow[\text{تحول لاعكوس}]{\text{تحول عكوس أو}} \underset{(F.S)}{\text{حالة نهائية}}$$

• والتحول الترموديناميكي بشكل عام هو: «عملية تغير في الحالة الماكروسكوبية للنظام»

ــ التحول اللاعكوس: لا يقبل مسار عودة إلى الحالة الابتدائية

على سبيل المثال * سقوط الماء من الشلال من الأعلى إلى الأسفل لا يقبل مسار عودة

- هرم الكائنات الحية عملية لاعكوسة: لا تقبل مسار عودة.

* كما أنه تحول سريع ومفاجئ ولا تكون خلاله متحولات الحالة معرّفة، يجب علينا الانتظار العودة لحالة التوازن النهائي قبل أن نستطيع استخدام قوانين الترموديناميك.

• التحول [illegible]: يقبل مسارة عودة «أي نفس مسار الذهاب من الحالة البدائية إلى الحالة النهائية ولكن يتبع بالاتجاه المعاكس

* وتكون متحولات الحالة معرّفة في كل لحظة من لحظات التحول.

- ونعبر عن القانون الثاني بدلالة الأول بالشكل:

$$\boxed{dU = T\,ds + \delta w}$$

- ملاحظة ①: تابع الحالة تفاضلة تام، بينما تابع الطريق (كالعمل وكمية الحرارة) غير تام.

- ملاحظة ②: إذا كان لدينا تابع $Z = Z(x,y)$، فإنه يكون تفاضل Z تفاضل تام إذا حقق الشرط:

$$Z(x,y) \Rightarrow dZ = \underbrace{\left.\frac{\partial Z}{\partial x}\right|_{y=cte}}_{M} dx + \underbrace{\left.\frac{\partial Z}{\partial y}\right|_{x=cte}}_{N} dy$$

فإذا كان: $\left.\frac{\partial M}{\partial y}\right|_{x=cte} = \left.\frac{\partial N}{\partial x}\right|_{y=cte} \Rightarrow Z$ تفاضلة تام

- **نص المبدأ الثالث في الترموديناميك:**

- انتروبية جملة متغلقة تسعى للصفر عندما تسعى درجة حرارتها للصفر المطلق. أي:

$$\boxed{S(T \to 0K) \to 0}$$

- **قانون بولتزمان وتطابقه مع المبدأين الثاني والثالث في الترموديناميك:**

- اقترح بولتزمان قانوناً يعبر عن حالة الاتزان الترموديناميكي الإحصائي انطلاقاً من أن الجملة في حالة الاتزان توصف بانتروبية عظمى S_{max} ووزن إحصائي أعظمي W_{max}.

- الوزن الإحصائي: هو عدد الحالات المجهرية الممكنة للجملة المتوازنة والموافقة لحالة مجهرية محددة لها عند امتلاكها قدراً معلوماً من الطاقة.

- ونعبر عن ذلك القانون رياضياً بالعلاقة:

$$\boxed{S_{max} = K \ln W_{max}} \quad ; \quad K = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ J/K$$

- وقد استخدم الصيغة اللوغاريتمية مع عبارة الوزن الإحصائي وذلك لأن التابع اللوغاريتمي يجعل الأرقام الفلكية للأوزان الإحصائية أرقام مصغرة.

- فإذا اعتبرنا $\omega = 1/W_{max}$ احتمال تواجد الجملة في إحدى حالاتها المجهرية، وأن الإحتمال $0 \le \omega \le 1$، فيمكن كتابة صيغة قانون بولتزمان بالشكل التالي:

$$\boxed{S_{max} = -K \ln \omega}$$

- S محول ترموديناميكي — W_{max} أو w محول إحصائي ⟸ علاقة بولتزمان هي العلاقة الوحيدة التي تربط بين علم الترموديناميك الكلاسيكي والميكانيك الإحصائي.

- تطابق قانون بولتزمان مع المبدأين الثاني والثالث :

المبدأ الثاني

« حالة التوازن الموافقة لأنتروبية عظمى »
عند درجات حرارة عظمى

$$S\begin{bmatrix} T \to T_{max}\,(K^{\circ}) \\ W_{max} \to \infty \\ w = \dfrac{1}{W_{max}} \to 0 \end{bmatrix} \to S_{max}$$

المبدأ الثالث

« حالة التوازن الموافقة لأنتروبية معدومة »
عند درجة حرارة الصفر المطلق

$$S\begin{bmatrix} T \to 0\,K \\ W_{max} \to 1 \\ w = \dfrac{1}{W_{max}} \to 1 \end{bmatrix} \to 0$$

• الكمونات الترموديناميكية :

- المقصود بالكمونات الترموديناميكية « دوال حالة لمتغيرات مختلفة تستخدم لقياس طاقة النظام حسب الخواص المراد العمل بها »
- الكمونات الأكثر شيوعاً هي :

الطاقة الداخلية U - وطاقة الأنتالبي H - وطاقة هلمهولتز الحرة F - وطاقة جيبس الحرة G.

- نستخدم المربع الموصوف بالشكل (1) في التعرف على أشهر التوابع الترموديناميكية وآلية ارتباطها ببعضها البعض.

	+	U	−	
I	T		P	F
	V		S	
		G		

الشكل (1)

- تتوزع داخل المربع المتحولات الجهرية للحالة الترموديناميكية (P, V, S, T)، بحيث يعبر جداء المتحولين المتقابلين قطرياً عن طاقة :

$$[PV] = [TS] = \text{Joul}$$

وتكون : متحولات العمود الأيمن موجبة
ومتحولات العمود الأيسر سالبة.

والمتحولات المستقلة لكل تابع من توابع الطاقة : هي الواقعة في الجهة المقابلة له والبعيدة عنه، أي :

$$U = U(S, V)$$
$$F = (T, V)$$
$$G = (T, P)$$
$$I = (S, P)$$

• علاقات ماكسويل :

① $U(S,V) \Rightarrow dU = \left.\frac{\partial U}{\partial S}\right|_V dS + \left.\frac{\partial U}{\partial V}\right|_S dV$

② $F(T,V) \Rightarrow dF = \left.\frac{\partial F}{\partial T}\right|_V dT + \left.\frac{\partial F}{\partial V}\right|_T dV$

③ $G(T,P) \Rightarrow dG = \left.\frac{\partial G}{\partial T}\right|_P dT + \left.\frac{\partial G}{\partial P}\right|_T dP$

④ $I(S,P) \Rightarrow dI = \left.\frac{\partial I}{\partial S}\right|_P dS + \left.\frac{dI}{dP}\right|_S dP$

* الغاية ① تعيين كل متحول من المتحولات الجهرية ومن ثمّ علاقات ماكسويل :

• من أجل تعيين المتحول x نقوم بالتالي :

✓ نشتق التابع المجاور له بالنسبة لـ المتحول y المقابل له قطرياً .

✓ نضرب إشارة x بـ $(+)$ إذا كان واقعاً في العمود الأيسر وبـ $(-)$ إذا كان واقعاً في العمود الأيمن .

• نقوم بتطبيق القاعدة على كل متغير من المتغيرات فنجد :

متحولات العمود الأيسر :

درجة الحرارة : $T = \left.\frac{\partial U}{\partial S}\right|_V = \left.\frac{\partial I}{\partial S}\right|_P$

الحجم : $V = \left.\frac{\partial I}{\partial P}\right|_S = \left.\frac{\partial G}{\partial P}\right|_T$

متحولات العمود الأيمن :

الأنتروبي : $-S = \left.\frac{\partial F}{\partial T}\right|_V = \left.\frac{\partial G}{\partial T}\right|_P$

الضغط : $-P = \left.\frac{\partial F}{\partial V}\right|_T = \left.\frac{\partial U}{\partial V}\right|_S$

والآن نجد بالتعويض في معادلات ماكسويل التفاضلية :

① $U(S,V) \Rightarrow dU = T\,dS - P\,dV$

② $F(T,V) \Rightarrow dF = -S\,dT - P\,dV$

③ $G(T,P) \Rightarrow dG = -S\,dT + V\,dP$

④ $I(S,P) \Rightarrow dI = T\,dS + V\,dP$

* الغاية ② تعيين العلاقات بين التوابع الترموديناميكية المتجاورة :

- العلاقة هي من الشكل :

$$f_1 = f_2 \pm xy$$

- حيث (x,y) هما الحرفين المستقلين للتابعين (f_1,f_2) وهما متحولات قطريان لمثلث قاعدة المثلث الذي يحصر التابعين f_1 ، f_2 .

- الإشارة $(\pm)$ تحدد حسب إشارة المتحول المستقل للتابع f_2 :

✓ فيكون $(-)$ إذا كان في العمود الأيمن

✓ وتكون $(+)$ إذا كان المتحول واقعاً في العمود الأيسر

- وبناءً على السابق نكتب مجموعة العلاقة :

① $U = F + TS$

② $F = G - PV$

③ $G = I - TS$

④ $I = U + PV$

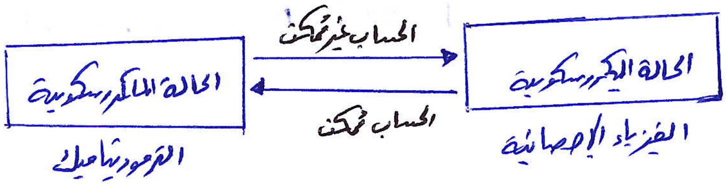
II. مبادئ الفيزياء الإحصائية

• لماذا الفيزياء الإحصائية ؟

- لأنه من أجل نظام صغير « عدد جسيمات محدودة » نصف سلوكه بواسطة قوانين نيوتن ، ولكن ماذا عن نظام مكون من عدد هائل من الجسيمات ؟ فإن الوصف السابق يكون غير مجدي ويحتاج إلى كمية هائلة من المشاكل التفاضلية في آن واحد لوصف هكذا أنظمة .

- وهنا يأتي دور الفيزياء الإحصائية وهو تهتم بمعرفة الحالة العيانية المتمثلة بالمقادير العيانية (الظاهرية) للأنظمة كالضغط والحجم ودرجة الحرارة ... إلخ انطلاقاً من الحالة الميكروسكوبية لها والتي تحدد إحصائياً .

- يمكن اختصار الكلام السابق بالرسم التالي :



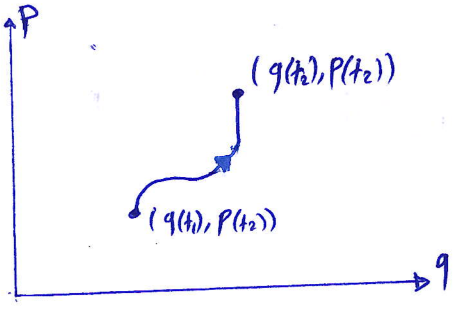
• مفهوم الفراغ الطوري :

- يمكن وصف الحالة المجهرية لنظام مكون من N جسيم في فضاء ثلاثي الأبعاد عند زمن محدد t بنقطة في فضاء الطور .

- فضاء الطور Γ : هو فضاء مكون من $3N$ إحداثي موضع $\vec{q}(t) = (q_1(t), q_2(t), \ldots\ldots, q_{3N}(t))^T$ و $3N$ إحداثي دفع خطي $\vec{P}(t) = (P_1(t), P_2(t), \ldots\ldots, P_{3N}(t))^T$ ؛ أي : $6N$ مركبة .

- تعطى الحالة الميكروسكوبية عند زمن t بـ $(\vec{q}(t), \vec{P}(t))$ ، ويتم وصف حركية (ديناميكية) النظام بمسار في فضاء الطور « مسار تطور الحالة المجهرية مع الزمن » كما في الشكل .

- وكما ذكرنا سابقاً يمكن توليد الحالة الماكروسكوبية والتي تتميز بالقيم العيانية T و V ..... إلخ من خلال عدد كبير من الحالات المجهرية والتي تمثل بمجموعة من أكبر نقاط في فضاء الطور .



الشكل : يوضح مسار تطور الحالة المجهرية في فضاء الطور Γ

- كثافة إحتمال وجود النظام المدروس في النقطة ($\vec{q}(t), \vec{p}(t)$) من فضاء الطور Γ تعطى بالعلاقة :

$$\boxed{\iint_{\Gamma} d^{(3N)}q \; d^{(3N)}p \; \rho(\vec{q},\vec{p},t) = 1 \quad ; \quad \rho(\vec{q},\vec{p},t) \geq 0}$$

حيث ρ هي دالة التوزيع أو كثافة الإحتمال.

- نلاحظ أنه:

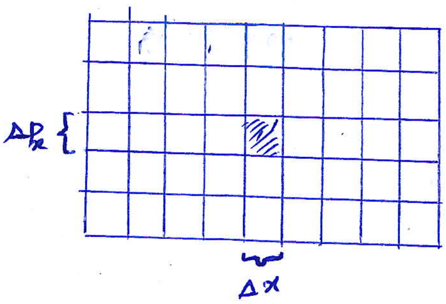
يمكن للحالة المجهرية ($\vec{q}(t), \vec{p}(t)$) أن تتغير خلال الزمن حتى لو كانت الحالة الماكروسكوبية لا تتغير. مثلا: الكميات مثل: الضغط، درجة الحرارة، الحجم .... الخ للهواء في غرفة هي ثابتة ولكن هذا لا يعني أن جزيئات الهواء لا تتحرك.

- حساب عدد الحالات المجهرية المسموحة:

هو حاصل قسمة حجم الفراغ الطوري على حجم الخلية الطورية.

حجم الفراغ الطوري: يتعلق بـ عدد الأبعاد والإندفاعات الموافقة له

حجم الخلية الطورية: يتعلق بالأُس الذي نرفع له ثابتة بلانك.



الشكل: يوضح الخلية الطورية في فراغ الطور $\Gamma(x, p_x)$

- من أجل جسيم في الفراغ (x, p_x) :

- لنحسب وحدة قياس هذا الحجم :

$$[x.p_x] = [x m v] = [J.s] = [h]$$

وحدة قياس هذا الحجم من وحدة قياس ثابتة بلانك.

يمكننا القول بأن هذا

- في هذه الدراسة فإنه: الفراغ يتكون من عدد من الخلايا ((الخلايا الطورية)) والتي تمثل حجم كل منها مساوٍ لـ h ، أي:

عنصر حجم في الفراغ الطوري

$$\boxed{\Delta x . \Delta p_x = h} \longrightarrow \text{عدد الحالات المسموحة} =$$

- تعميم من أجل جسيم في الفراغ $(x, y, z ; p_x, p_y, p_z)$:

$$\left.\begin{aligned} \Delta x . \Delta p_x &= h \\ \Delta y . \Delta p_y &= h \\ \Delta z . \Delta p_z &= h \end{aligned}\right| \longrightarrow \text{حجم الخلية الواحدة} = h^3 \Rightarrow \text{عدد الحالات المسموحة} = \frac{\Gamma(p,q)}{h^3} = \frac{q_V . p_V}{h^3} = \frac{V \, p_x . p_y . p_z}{h^3}$$

- وهكذا من أجل N جسيم في الفراغ المكون من $6N$ مركبة :

$$\left.\begin{aligned} (\Delta x . \Delta p_x)^N &= h^N \\ (\Delta y . \Delta p_y)^N &= h^N \\ (\Delta z . \Delta p_z)^N &= h^N \end{aligned}\right| \longrightarrow \text{حجم الخلية الطورية:} \; h^{3N} \Rightarrow \text{عدد الحالات المسموحة} = \frac{\Gamma(p,q)}{h^{3N}} = \frac{q_V . p_V}{h^3} = \frac{V^N \, p_x^N . p_y^N . p_z^N}{h^{3N}}$$

• عنصر الفراغ الطوري بدلالة (الاندفاع ، السرعة ، الطاقة) :

- الفراغ الطوري Γ معطى بدلالة p, q ، أي : $\Gamma = \Gamma(p, q)$ وبالتالي عنصر الحجم فيه يكون معطى بدلالة عنصري الحجم dq_v و dp_v ، ونكتب :

$$d\Gamma = dq_v \cdot dp_v$$

- نفرض للسهولة أنّ : $dq_v = V$ «لأنه تمثيل جداءات لعناصر الموضع»

وكما نأخذ : $dp_v = d(\frac{4}{3}\pi p^3)$ مساوياً لعنصر حجم الكرة والتي نصف قطرها الاندفاع ذاته.

$$dp_v = 4\pi p^2 dp \Rightarrow \boxed{d\Gamma = 4\pi V p^2 dp} \quad (1)$$ عنصر حجم الفراغ الطوري بدلالة الاندفاع

- وبدلالة السرعة :

نعلم أنّ : $p = m v \Rightarrow dp = m dv \Rightarrow \boxed{d\Gamma = 4\pi V m^3 v^2 dv}$ (2) عنصر حجم الفراغ الطوري بدلالة السرعة

- وبدلالة الطاقة :

نعلم أنّ : $p^2 = 2m\varepsilon \Rightarrow p = \sqrt{2m\varepsilon} \Rightarrow dp = \frac{m}{\sqrt{2m\varepsilon}} d\varepsilon \xRightarrow{(1)} d\Gamma = 4\pi V\, 2m\varepsilon \frac{m}{\sqrt{2m\varepsilon}} d\varepsilon$

$$\Rightarrow \boxed{d\Gamma = 2\pi V (2m)^{3/2} \cdot \varepsilon^{1/2} d\varepsilon}$$ عنصر حجم الفراغ الطوري بدلالة الطاقة

• درجة التحلل لسويات الطاقة :

- سويات الطاقة ε_n منحلة وفقاً لميكانيك الكم من أجل الأعداد الكمية $n \geq 2$ كما يلي : $\underset{n=4}{sp,d,2,\dots}$ ، $\underset{n=3}{s,p,d}$ ، $\underset{n=2}{s,p}$ ، $\underset{n=1}{s}$

- ودرجة التحلل : تمثل عدد حالات التوزع المجهرية الممكنة والتي يكون فيها للجسم نفس الطاقة ونرمز لها بالرمز $g(\varepsilon_n)$.

- وفي حالة التوزع المستمر :

$dN(3)$

هي عدد سويات الطاقة أو ضمن المجال الطاقي $d\varepsilon$ ، أي درجة التحلل :

$$g(\varepsilon) = \frac{dN(\varepsilon)}{d\varepsilon} \quad ; \quad N(\varepsilon) = \frac{4}{3}\pi \frac{V}{h^3}(2m)^{3/2}(\varepsilon)^{3/2}$$ «وفقاً لميكانيكا الكم»

ومنه يكون :

$$\boxed{g(\varepsilon) = 2\pi C V (2m)^{3/2} \cdot \varepsilon^{1/2} d\varepsilon} \quad (4) \quad ; \quad C = 1/h^3$$

ولكن : $d\Gamma(\varepsilon) = 2\pi V (2m)^{3/2} \varepsilon^{1/2} \Rightarrow \boxed{g(\varepsilon) = C\, d\Gamma(\varepsilon)} \quad (4)'$

- وبدلالة الاندفاع :

$\varepsilon = p^2/2m \Rightarrow d\varepsilon = \frac{p}{m}\,dp \Rightarrow g(p) = 2\pi\, C V (2m)^{3/2} \frac{p}{\sqrt{2m}} \cdot \frac{2p}{2m}\,dp$

$\Rightarrow \boxed{g(p) = 4\pi C V p^2 dp}$ (5) وبما أن : $d\Gamma(p) = 4\pi V p^2 dp \Rightarrow \boxed{g(p) = C\, d\Gamma(p)}$ (5)'

- وبدلالة السرعة :

$p = mv \Rightarrow dp = m\,dv \Rightarrow \boxed{g(v) = 4\pi C V m^3 v^2 dv}$ (6) ولكن : $d\Gamma(v) = 4\pi V m^3 v^2 dv$

$\Rightarrow \boxed{g(v) = C\, d\Gamma(v)}$ (6)'