كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل رياضي4

المحاضرة : الاولى/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

مقدمة في الفضاءات المترية والمنظمة والاقليدية والعلاقة فيما بينها

- دراسة الدوال التابعة لعدة متحولات
- دراسة استمرارها وقابلية المفاضلة لها ومن ثم دراسة نهايات هذه الدوال.
- دراسة مشتقاتها الآتية والعلاقة بين هذه المواضيع
- دراسة الدوال الضمنية وبعض تطبيقاتها وتطبيقات المشتقات الجزئية
- دراسة القيم الحدية العادية والشرطية
- دراسة التكامل الثنائي وتطبيقاته
- دراسة المعاملات المنحنية

وهي المفاهيم التي سندرسها في هذه المادة

- مقدمة في الفضاءات المترية والمنظمة والاقليدية

الفضاء المتري وخواصه:

تعريف الفضاء المتري: لتكن M مجموعة ما غير خالية ندعو كل تطبيق $d: M\times M \to R^{+} \cup \{0\}$

$(x,y) \longrightarrow d(x,y)$

يحقق الشروط التالية

1") $d(x,y) \geq 0 \; ; \; \forall x,y \in M$

$\& \; d(x,y) = 0 \iff x = y \; ; \; x,y \in M$

2") $d(x,y) = d(y,x) \; ; \; \forall x,y \in M$

3") $\forall x,y,z \in M \; ; \; d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

تطبيق مسافة d على M أو اختصاراً ~~"مسافة d على M"~~ أو اختصاراً "d مسافة" وندعو (M,d) أو اختصاراً "M فضاءً متريًّا" وندعو هذا الفضاء المتري M والشروط التي يحققها وهي (1" و 2" و 3") بشروط المسافة d وندعو $d(x,y)$ المسافة أو البعد بين النقطتين x و y في الفضاء المتري M

ملاحظة:

d مسافة على M ؛ $M \neq \phi \iff$ تحقق الشروط (1") و (2") و (3").

مثال 1:

(الفضاء المتقطع): لتكن A مجموعة ما غير خالية $A \neq \phi$ ولنعرّف التطبيق d بالشكل $d: A \times A \to R^{+} \cup \{0\}$

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 \; ; & x \neq y \\ 0 \; ; & x = y \end{cases}$$

$\forall x,y \in A$ إنَّ d مسافة على A و (A,d) فضاءً متريًّا يدعى الفضاء المتقطع ويترك برهانه لمحاضرة العملي.

مثال:

إذا كانت IR مجموعة الأعداد الحقيقية والتطبيق d المعرّف بالشكل التالي $d: R \times R \to R^{+} \cup \{0\}$

$d(x,y) = |x-y| \; ; \; \forall x,y \in IR$

هو مسافة على $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}$ أو $(\mathbb{R}, d)$ أو $\mathbb{R}$ اختصاراً هو فضاء متري وندعوه الفضاء المتري الحقيقي $(\mathbb{R}, |.|)$ أو محور الأعداد الحقيقية وندعو d أو $|.|$ المسافة العادية المعرفة على $\mathbb{R}$ (يترك برهانه للعملي).

ملاحظة: إن المسافة العادية تعرض المسافة بين أي نقطتين في الفضاء $\mathbb{R}$.

بعض المتراجحات الهامة

أولاً: متراجحة هولدر للمجاميع المنتهية:

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

حيث p و q عددان أكبر من الـ 1 ويرتبطان وفق العلاقة

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}.$$

$$q = \frac{p}{p-1}$$

ثانياً: متراجحة كوشي

بوضع $p = q = 2$ والتعويض في متراجحة هولدر نحصل على متراجحة كوشي وهي

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

أو

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} |b_i|^2}$$

متراجحة منكوفسكي:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

حيث $1 \le p$ عدد حقيقي

ملاحظة: بوضع $P=2$ في متراجحة منكوفسكي نحصل على المتراجحة:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2}$$

والتي سنستخدمها لاحقاً في برهان متراجحة المثلث للمسافة d المعرفة على الفضاء المتري $\mathbb{R}^n$

مثال عن الفضاءات المترية:

الفضاء المتري الحقيقي $\mathbb{R}^n$ ذو n بعداً.

$$\mathbb{R}^n=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\dots\times\mathbb{R}=\{x;\ x=(x_1,x_2,\dots,x_n);\ x_i\in\mathbb{R};\ i=1,2,\dots,n\}$$

ولنعرف على $\mathbb{R}^n$ التطبيق $d:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ بالشكل التالي:

$$d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\dots+(x_n-y_n)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2};\ \forall x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,$$

$$y=(y_1,y_2,\dots,y_2)\in\mathbb{R}^n$$

إنَّ d مسافة على $\mathbb{R}^n$ تسمى المسافة الإقليدية و $(\mathbb{R}^n,d)$ أو $\mathbb{R}^n$ فضاء متري يدعى الفضاء الإقليدي الحقيقي ذو n بعداً (يبرهن بالعملي)

عندما $n=1$ نحصل على الفضاء المتري الحقيقي $\mathbb{R}$ ذو البعد الواحد حيث:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}=\sqrt{(x-y)^2}=((x-y)^2)^{\frac{1}{2}}=|x-y|$$

عندما $n=2$ نحصل على الفضاء المتري الحقيقي ذو البعدين وهو $\mathbb{R}^2$ والمسافة هي مسافة البعد بين نقطتين

$y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$ و $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$

ويكون لدينا $d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$

وهكذا

ملاحظة: يمكننا أن نعرف التطبيق

$d_p:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^+\cup\{0\}$

على $\mathbb{R}^n$ بالشكل $d_p(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

حيث p عدد حقيقي أكبر من الـ 1

$\forall x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$

$y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$

إنه d_p هو مسافة على $\mathbb{R}^n$ ويمكن برهان ذلك

وعندما نضع $p=2$ نحصل على المسافة الاقليدية وهي $d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$ ولبرهان متراجحة المثلث ولبرهان

أنه d_p مسافة ~~على~~ عند $\mathbb{R}^n$ نستخدم متراجحة

منكوفسكي.

مثال ٢: فضاء الدوال الحقيقية المعرفة والمستمرة على

المجال الحقيقي $C[a,b]$ وهو $C[a,b]$

لتكن $C[a,b]$ مجموعة جميع الدوال الحقيقية التابعة

لمتحول حقيقي واحد والمعرفة والمستمرة على المجال

الحقيقي $[a,b]$ حيث $[a,b]\in\mathbb{R}$ أي $f\in C[a,b]$ أو $g\in C[a,b]$

وبالتالي:

$f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالة معرفة على $[a,b]$ ومستمرة

وعليه $y=f(x)$; $\forall x\in[a,b]$

$C[a,b] = \{ f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \wedge y = f(x) ; \forall x \in [a,b] \}$

ونعرّف على $C[a,b]$ التطبيق d بالشكل

$d : C[a,b] \times C[a,b] \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$d(f,g) = \max |f(x) - g(x)|$

$a \le x \le b \ ; \ \forall f,g \in C[a,b]$

إن d مسافة على $C[a,b]$ و $C[a,b]$ فضاء متري يترك برهانه للطالب

بعض الملاحظات على الفضاء $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) ; x_i \in \mathbb{R} ; i = 1,2,\dots,n$

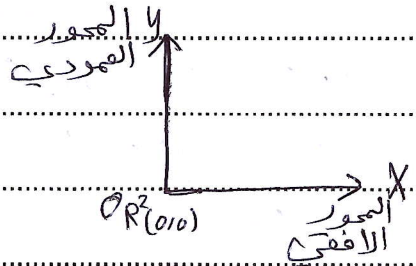
وندعو x قيمة أو شعاع له n مركبة أو n مسقط وإذا كانت $x \in \mathbb{R}^2$ فإنه $x = (x_1, x_2) \Leftarrow$ له مسقطان (مركبتان)

فإنه $x \in \mathbb{R}^2$

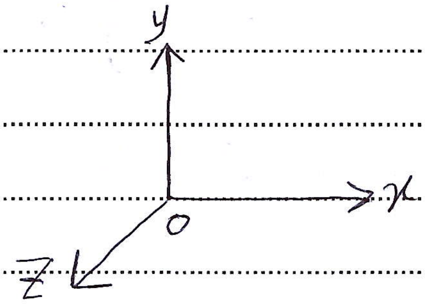
$x = (x_1, x_2, x_3) \Leftarrow$ له ثلاث مساقط أو ثلاث مركبات

تعريف: ندعو مجموعة النقط $\{x \in \mathbb{R}^n ; x = (0,0,\dots,x_i,0,\dots,0)\}$ بحيث $x_i \in \mathbb{R}$ وتسمى OX_i لمجموعة نقط المحور الاحداثي ذو الترتيب i في الفضاء لـ $\mathbb{R}^n$ وأي نقطة (شعاع) في هذا المحور في الفضاء $\mathbb{R}^n$ لها الشكل $c = (0,0,0,\dots,0,x_i,0,\dots,0)$ وأي شبكة احداثيات في الفضاء لـ $\mathbb{R}^n$ مؤلفة من n محور احداثي مبدؤها هو النقطة $O_{\mathbb{R}^n} = (0,0,\dots,0)$ وهو مبدأ الاحداثيات يدعى الصفر الشعاعي وله n مركبة.

مثال: في الفضاء $\mathbb{R}^2$ فإن شبكة الإحداثيات مؤلفة من محوري الاحداثيات هما:



وأي نقطة M من المحور OX (المحور الافقي) لها الشكل $M=(x,0)^2$ وأي نقطة M' من المحور العمودي Oy لها الشكل $M'=(0,y)$ من اجل الفضاء $\mathbb{R}^3$ فإن شبكة الاحداثيات في $\mathbb{R}^3$ مؤلفة من ثلاث محاور احداثية بالشكل



وأي نقطة من المحاور الاحداثية من مثلاً OX لها الشكل $(x,0,0)$ والمحور Oy له الشكل $(0,y,0)$ والمحور OZ له الشكل $(0,0,Z)$

بعض المفاهيم التبولوجية الاساسية في الفضاء الاقليدي $\mathbb{R}^n$:

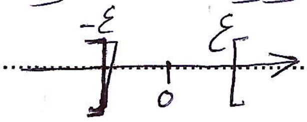
تعريف الكرة المفتوحة: لتكن $x\in\mathbb{R}^n$ و $\varepsilon>0$ حيث $x=x_1,\dots,x_n$ نرمز للكرة المفتوحة في $\mathbb{R}^n$ والتي مركزها x ونصف قطرها ε بـ $N(x,\varepsilon)$ ونعرفها بأنها مجموعة النقط

$$N(x,\varepsilon)=\{y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n, d(y,x)<\varepsilon\}$$
$$=\{y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n ; \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2}<\varepsilon\}$$

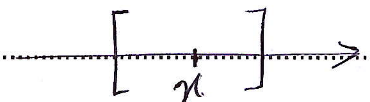
وأحياناً ندعوها جوار كروي في $\mathbb{R}^n$ مركزه x ونصف قطره ε أما الكرة المغلقة في الفضاء $\mathbb{R}^n$ والتي مركزها $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ ونصف قطرها $\varepsilon>0$ فنرمز لها بالرمز $B=(x,\varepsilon)$ ونعرفها بأنها مجموعة النقط

$$B(x,\varepsilon)=\{y=(y_1,y_2,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n ; d(y,x)\leq\varepsilon\}$$
$$=\{y=(y_1,y_2,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n ; \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2}\leq\varepsilon\}$$

مثال: الكرة المفتوحة في الفضاء $\mathbb{R}$ مركزها O_R هو عبارة عن مجال مفتوح مركزه الصفر ونصف قطره ε وطوله 2ε



أما الكرة المغلقة في الفضاء $\mathbb{R}$ فهي عبارة عن مجال مغلق طوله 2ε



مركزه x ونصف قطره ε

أما عندما $n=2$ في الفضاء $\mathbb{R}^2$ فإما الكرة المفتوحة عبارة عن المجموعة $N(x,\varepsilon)=\{y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2 ; \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}<\varepsilon\}$ كرة مفتوحة مركزها x ونصف قطرها ε أما الكرة المغلقة في $\mathbb{R}^2$ فهي مجموعة النقط

$$B(x,\varepsilon)=\{y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2 ; \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}\leq\varepsilon\}$$

انتهت المحاضرة